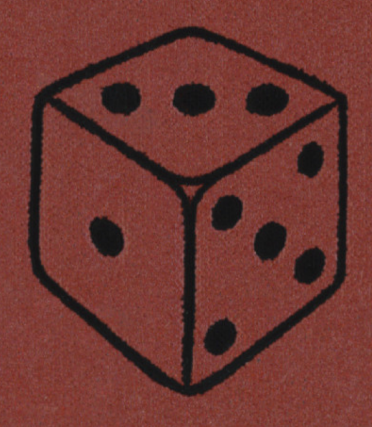
Л. Е. Майстров

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ВЕРОЯТНОСТИ



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Институт истории естествознания и техники

Л. Е. Майстров

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ВЕРОЯТНОСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1980

УДК 519.21

Майстров Л. Е. **Развитие понятия вероятности.** М.: Наука, 1980.

В монографии рассматривается история развития одного из основных понятий современной математики — понятия вероятности. Прослеживается история этого понятия от представлений античности до середины XX в., а также история других основных понятий и представлений теории вероятностей. Широко освещается роль понятия вероятности в других науках, прежде всего в физике.

Издание рассчитано на широкий круг математиков (преподавателей и учащихся), философов и историков науки.

Ответственный редактор
доктор философских наук
Ю. В. САЧКОВ

М $\frac{20203\text{-}070}{055(02)\text{-}80}$ 19-79 2602020000

ВВЕДЕНИЕ

Понятие вероятности является одним из наиболее общих понятий современной науки. Вероятностными идеями пронизано все современное естествознание. Понятие вероятности лежит в основе математической дисциплины — теории вероятностей, значение которой в общей структуре современной математики существенно повысилось. В современной математике мы наблюдаем «резкое повышение удельного веса теории вероятностей в ряду других математических наук» [Яглом И., 1965, с. 14].

Вероятностные идеи стимулируют в наши дни развитие всего комплекса знаний, начиная от наук о неживой природе и кончая науками об обществе. Прогресс современного естествознания неотделим от использования и развития вероятностных идей и методов. В наше время трудно назвать какую-либо область исследований, где бы не применялись вероятностные методы. «Само понятие вероятности можно, не боясь преувеличений, назвать знаменем теоретического естествознания XX в., по крайней мере — первой его половины» [Сачков, 1971, с. 9].

Фундаментальное значение вероятностных идей и представлений в современной науке неоднократно подчеркивалось многими выдающимися учеными. Приведем несколько примеров. Н. Винер связывает с именем Гиббса радикальное становление вероятности в науке, развитие вероятностной точки зрения на устройство мира и основания многих наук, в том числе физики. Именно поэтому Винер писал: «Гиббсу, а не Альберту Эйнштейну, Вернеру, Гейзенбергу или Максу Планку мы должны приписать первую великую революцию в физике XX века» [Винер, 1958, с. 26]. В докладе «Статистика в физике», прочитанном в 1935 г., М. Борн говорил: «Вероятность — это фундаментальное понятие физики» [Борн, 1963, с. 75]. И. Е. Тамм, подчеркивая, что законы микромира по своей структуре статистичны, т. е. существенным образом используют вероятность, писал: «Статистический характер законов микромира обусловлен отнюдь не ограниченностью нашего познания микромира, как это предполагалось одно время некоторыми исследователями, а лежит в самой природе вещей» [Тамм, 1968]. Точка зрения, против которой выступает Тамм, действительно имела место. В предисловии к русскому переводу книги Э. Бореля «Случай» (1923) редактор перевода В. А. Костицын писал: «Успехи физики и астрономии выдвинули статистический метод на первое

место в современном естествознании» [Борель, 1923, с. VIII]. И далее: «Поле гипотез относительно молекулярного мира все более сужается, и недалек тот день, когда строение атома и междуатомные силы нам будут хорошо известны. Тогда снова вступит в свои права здоровый научный детерминизм, а статистические естественные законы будут лишь временным этапом нашего познания» [Там же, с. X]. Вопреки этому статистические законы проникают в более широкие сферы современного естествознания, и это определяется не уровнем наших знаний, а структурой явлений, которые изучаются естествознанием.

Вероятность вошла в физику во второй половине прошлого века в процессе разработки молекулярно-кинетической теории. Но еще большее значение идея вероятности приобрела в современной физике. Квантовая теория уже принципиальным образом включает в себя понятие вероятности.

Понятие вероятности играет громадную роль в современной науке, а тем самым является существенным элементом современного мировоззрения в целом, современной философии.

Все это порождает внимание и интерес к развитию понятия вероятности, которое тесно связано с общим движением науки. На понятие вероятности оказывали существенное влияние достижения многих наук, но и это понятие в свою очередь заставляло их уточнять подход к исследованию мира.

Несмотря на такое фундаментальное значение вероятности, несмотря на то, что это понятие разрабатывается наукой уже в течение столетий, многие современные исследователи указывают на его незавершенность и неясность. „Все говорят о вероятности, но никто не может сказать в удовлетворительной для других форме, что это такое" [Биркгоф, 1952]. Приведем мнения еще других авторов: «Все еще нет, на наш взгляд, достаточной ясности в разработке логических и общетеоретических оснований вероятности» [Сачков, 1970, с. 87]. «Анализ проблем, связанных с выяснением сущности вероятностных представлений в квантовой механике, далеко не завершен и в настоящее время» [Купцов, 1970, с. 98]. «До сих пор нет точного определения понятия вероятности» [Clarke, 1954]. «Теория вероятностей покоится на неясном, шатком фундаменте... Нужно подвести под теорию вероятностей строгий научный фундамент» [Романов, 1971, с. 231]. Фрейденталь свою статью [Freudental, 1960] начинает словами: «Вероятность является наиболее спорным математическим понятием».

Аналогичных высказываний и суждений можно было бы привести очень много. Мнение о незавершенности и спорности понятия вероятности в современной науке не вызывает сомнений или возражений.

Задача настоящей работы состоит не в том, чтобы дать такое определение вероятности, которое бы всех удовлетворяло, более того, мы постараемся показать, что этого вообще нельзя сделать. Автор поставил перед собой задачу показать, как развивалось

это понятие, начиная от нечетких представлений в античной науке и кончая современными представлениями.

Ввиду того, что вероятность является основным понятием теории вероятностей, это понятие, с одной стороны, отражает в себе все этапы развития этой науки, с другой стороны, существует и обратная связь — понятие вероятности оказывало влияние на постановку и решение проблем теории вероятностей. Таким образом, понятие вероятности неразрывно связано с развитием теории вероятностей, которая, начав с решения очень скромных задач, выросла в наши дни в ведущую математическую дисциплину. Поэтому периодизацию развития понятия вероятности мы не отделяем от периодизации развития теории вероятностей.

Периодом в истории науки называется определенная стадия ее развития, которая характеризуется совокупностью специфических признаков, свойственных данному периоду. Это в первую очередь общность метода и подхода к изучаемому предмету, общность задач, общность запросов, стоящих перед данной наукой. Периодизация науки зависит от ее внутренней логики, от связи с другими науками, с техникой, от общего развития социально-экономических отношений. Поступательное движение познания осуществляется под воздействием практики. Это воздействие в конечном счете и определяет сроки перехода науки от одного периода к другому. Следует иметь в виду, что переход от одной стадии развития науки к другой может затянуться на многие годы. Социально-политические условия в свою очередь могут стимулировать или тормозить развитие науки.

Развитие теории вероятностей, а с нею и развитие понятия вероятности можно разбить на следующие этапы.

1. *Предыстория теории вероятностей.* В этот период, начало которого теряется в веках, ставились и решались элементарные задачи, которые позже будут отнесены к теории вероятностей. Никаких специальных методов в этот период не возникает. Этот период кончается работами Кардано, Пачоли, Тарталья и др.

С вероятностными представлениями мы встречаемся еще в античности. У Демокрита, Лукреция Кара и других античных ученых и мыслителей мы находим глубокие предвидения о строении материи с беспорядочным движением мелких частиц (молекул), мы встречаем рассуждения о равновозможных исходах (равновероятных) и т. п. Еще в древности делались попытки сбора и анализа некоторых статистических материалов — все это (а также и другие проявления внимания к случайным явлениям) создавало почву для выработки новых научных понятий, в том числе и понятия вероятности. Но античная наука не дошла до выделения этого понятия.

В философии вопрос о случайном, необходимом и возможном всегда был одним из основных. Философская разработка этих проблем также оказывала влияние на формирование понятия вероятности. В целом в средневековье мы наблюдаем только разрознен-

ные попытки осмыслить встречающиеся вероятностные рассуждения.

В работах Л. Пачоли, Н. Тарталья и в первую очередь Д. Кардано уже делается попытка выделить новое понятие — отношение шансов — при решении ряда специфических задач, прежде всего комбинаторных. Но такие попытки встречаются только эпизодически.

2. *Возникновение теории вероятностей как науки.* К середине XVII в. вероятностные вопросы и проблемы, возникающие в статистической практике, в практике страховых обществ, при обработке результатов наблюдений и в других областях, привлекли внимание ученых, так как они стали актуальными вопросами. В первую очередь это относится к Б. Паскалю, П. Ферма и Х. Гюйгенсу. В этот период вырабатываются первые специфические понятия, такие, как математическое ожидание и вероятность (в форме отношения шансов), устанавливаются и используются первые свойства вероятности: теоремы сложения и умножения вероятностей. В это время теория вероятностей находит свои первые применения в демографии, страховом деле, в оценке ошибок наблюдения, широко используя при этом понятие вероятности.

3. Следующий период начинается с появления работы Я. Бернулли «Искусство предположений» (1713), в которой впервые была строго доказана первая предельная теорема — простейший случай закона больших чисел. К этому периоду, который продолжался до середины XIX в., относятся работы Муавра, Лапласа, Гаусса и др. В центре внимания в это время стоят предельные теоремы. Теория вероятностей начинает широко применяться в различных областях естествознания. И хотя в этот период начинают применяться различные понятия вероятности (геометрическая вероятность, статистическая вероятность), господствующее положение занимает, в особенности после работ Лапласа, так называемое класссическое определение вероятности.

4. Следующий период развития теории вероятностей связан прежде всего с Петербургской математической школой. За два столетия развития теории вероятностей главными ее достижениями были предельные теоремы. Но не были выяснены границы их применимости и возможности дальнейшего обобщения. Наряду с огромными успехами, достигнутыми теорией вероятностей в предыдущий период, были выявлены и существенные недостатки в ее обосновании, это в большой мере относится к недостаточно четким представлениям о вероятности. В теории вероятностей создалось положение, когда дальнейшее ее развитие требовало уточнения основных положений, усиления самих методов исследования.

Это было осуществлено русской математической школой во главе с П. Л. Чебышевым. Среди ее крупнейших представителей мы видим А. А. Маркова и А. М. Ляпунова.

В этот период в теорию вероятностей входят оценки приближений предельных теорем, а также происходит расширение класса

случайных величин, подчиняющихся предельным теоремам. В это время в теории вероятностей начинают рассматривать некоторые зависимые случайные величины (цепи Маркова). Теория вероятностей достигает и других замечательных успехов: разрабатывается теория характеристических функций, теория моментов, разрабатываются методы оценок неравенств и многое другое. Ее результаты широко применяются в других разделах математики и находят различные приложения. Понятие вероятности получило большое распространение в естественных науках, в первую очередь это относится к физике. Появляются работы Максвелла, а затем Больцмана и Д. Гиббса. Их трудами создается статистическая физика. Но это внедрение вероятностных методов и понятий в физику шло в довольно большом отрыве от достижений теории вероятностей. Вероятности, применяемые в физике, были не совсем теми же понятиями, которые применялись в математике. Существующие понятия вероятности не удовлетворяли потребностей естественных наук, в первую очередь физики. В результате этого начинают возникать различные трактовки вероятности, которые были трудно сводимы к одному определению, не всегда удавалось дать им и строгое математическое обоснование. На эти трудности указывают парадоксы Бертрана, поддержанные затем А. Пуанкаре.

Развитие теории вероятностей в начале XX в. привело к необходимости пересмотра и уточнения ее логических основ, в первую очередь понятия вероятности. Этого требовало развитие физики и применение в ней вероятностных понятий и аппарата теории вероятностей; этого требовало развитие самой теории вероятностей, в которой остро ощущалась неудовлетворительность классического обоснования лапласовского типа; этого требовало и развитие других наук, которые применяли вероятностные понятия. Следует иметь в виду и то, что к началу XX в. аксиоматический метод стал проникать во многие области математики (работы Д. Гильберта, Пеано и др.), что также оказало влияние на теорию вероятностей.

В результате всего этого возникла необходимость аксиоматизации теории вероятностей и ее основного понятия — вероятности.

5. Современный период развития теории вероятностей начался с установления аксиоматики. Этого прежде всего требовала практика, так как для успешного применения теории вероятностей в физике, биологии и других областях науки, а также в технике и военном деле необходимо было уточнить и привести в стройную систему ее основные понятия. Благодаря аксиоматике теория вероятностей стала абстрактно-дедуктивной математической дисциплиной, тесно связанной с другими математическими дисциплинами. Это обусловило небывалую широту исследований по теории вероятностей и ее применениям, начиная от хозяйственно-прикладных вопросов и кончая самыми тонкими теоретическими вопросами теории информации и теории случайных процессов.

Первые работы этого периода связаны с именами С. Н. Берн-

штейна, Р. Мизеса, Э. Бореля. Окончательное установление аксиоматики произошло в 30-е годы XX в. Анализ тенденций развития теории вероятностей позволил А. Н. Колмогорову создать общепринятую аксиоматику. В вероятностных исследованиях аналогии с теорией множеств начали играть существенную роль. Идеи метрической теории функций все глубже стали проникать в теорию вероятностей. Возникла потребность в аксиоматизации теории вероятностей исходя из теоретико-множественных представлений. Такая аксиоматика и была создана Колмогоровым; она способствовала тому, что теория вероятностей окончательно укрепилась как полноправная математическая дисциплина.

Аксиоматическое построение сделало «теорию вероятностей применимой не только в обычных областях ее приложений, но и в таких разделах математики, которые на первый взгляд, казалось бы, стоят весьма далеко от теории вероятностей. В основе этих разнообразных применений лежит то обстоятельство, что теория вероятностей, как и всякая аксиоматическая наука, допускает различные интерпретации» [Кубилюс, 1956, с. 31]. В этот период понятие вероятности проникает почти во все сферы человеческой деятельности, становясь одним из основных понятий современной науки. Возникают самые различные определения вероятности, несводимые друг к другу. Многообразие определений основных понятий — существенная черта современной науки, и понятие вероятности не исключение. Современные определения в науке — это изложение концепций, точек зрения, которых может быть много для любого фундаментального понятия, и все они отражают какую-нибудь существенную сторону определяемого понятия. Это относится и к понятию вероятности.

Мы остановились на периодизации теории вероятностей (и понятия вероятности), так как по этому вопросу в современной литературе высказываются самые различные мнения. Приведем некоторые примеры.

Ламперти считает, что «классическая» теория вероятностей — это теория вероятностей до 1950 г. [Ламперти, 1973, с. 7]. Кац полагает, что современная теория вероятностей начинается с Бореля [Кац, 1963, с. 26]. Относительно начала теории вероятностей Гнеденко пишет: «Возникновение теории вероятностей, связанное с именами Паскаля, Ферма, Гюйгенса и в особенности Якова Бернулли, относится ко второй половине XVII в.» [Гнеденко, 1948, с. 392]. Можно привести и другие, часто противоречивые высказывания, связанные с периодизацией теории вероятностей.

Возможно, каждое из таких высказываний и имеет смысл, но они делаются без общей периодизации теории вероятностей, поэтому неясен принцип выделения того или иного этапа и его места во всем развитии теории вероятностей.

С точки зрения каждого этапа развития теории вероятностей, все ее предыдущее развитие можно считать предысторией науки, поэтому начало теории вероятностей — условное понятие, его

можно относить к XVII в., к Я. Бернулли, к русской школе, к возникновению аксиоматики, а возможно, и к нашим дням[1].

В последние годы намечаются новые подходы к основным понятиям теории вероятностей, в том числе и к понятию вероятности.

В наше время вероятностные суждения глубоко проникли во многие науки, их истолкование является актуальным для обоснования многих разделов естествознания. Более того, в ряде случаев решение основных методологических вопросов конкретной науки упирается в соответствующую трактовку вероятностных вопросов.

Понятие вероятности имеет свою специфику среди других математических понятий. Фактически все основные понятия, которые вошли в обиход математики в последние несколько столетий, содержат в своих определениях математические знаки и символы. Таковы определения различных интегралов и производных, непрерывности и сходимости, функции и предела и многих, многих других математических понятий.

При определении понятий, которые были в обиходе математики еще в древности, к математическим знакам, как правило, не прибегают. Таковы определения числа, прямой линии и т. п. Это послужило одной из причин того, что в обсуждении таких понятий принимали участие в течение всего времени люди, далеко стоящие от математики. Естественно, что такие обсуждения не приносили пользы в выяснении сущности фундаментальных понятий математики.

Аналогичную картину мы наблюдаем и с понятием вероятности. Ввиду того что определения этого понятия до последнего времени не содержали математических знаков и формул, было принято считать, что ими могут заниматься (и занимались) специалисты, далекие от математики. В результате это не только не принесло пользы, но внесло громадную путаницу в обсуждаемый вопрос. Трудно себе представить, чтобы филолог или социолог без специальной математической подготовки стал бы обсуждать, например, такое понятие, как интеграл Римана.

Интеграл Римана. Пусть на конечном отрезке $[a, b]$ задана ограниченная функция $f(x)$. Образуем сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, где x_i — точки, которыми $[a, b]$ разбит каким-либо образом на конечное число n частичных промежутков $[x_{i-1}, x_i]$, причем $x_0 = a$, $x_n = b$, а ξ_i — любая точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Если в классе всевозможных разбиений $[a, b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и при любом выборе точек ξ_i в отрезочках $[x_{i-1}, x_i]$ существует единственный предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

[1] Относительно периодизации теории вероятностей см. [Майстров, 1967, 1968].

где $\lambda = \max_i (x_i - x_{i-1})$, то этот предел называется определенным интегралом в смысле Римана функции $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$.

Но тот же специалист без какой бы то ни было математической подготовки смело бросается в обсуждение понятия вероятности, например, такого: «Вероятностью события называется дробь, числитель которой представляет число равновозможных случаев, благоприятных этому событию, а знаменатель — число всех равновозможных случаев, соответствующих вопросу» [Марков, 1898, с. 4]. Еще свободнее он себя чувствует в определении, в котором говорится, что вероятность — это «числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях, т. е. характеристика объективно существующей связи между этими условиями и событием» [Колмогоров, 1969, с. 508]. Ему кажется, что в таких определениях и в таком понятии он может разобраться и даже внести ясность в него и без специальных знаний и подготовки. Но понятие вероятности столь же фундаментальное (если не более) понятие математики, как и интеграл, определение которого мы привели выше.

Для того чтобы отмежеваться от дилетантских рассуждений о вероятности, математики часто прибегают к термину «математическая вероятность», хотя понятие вероятности едино и не существует математических и нематематических вероятностей. Основную роль в выработке этого понятия сыграли математики, хотя не следует отрицать и роль других факторов.

Так обстояло дело со всеми фундаментальными понятиями математики, такими, например, как число, функция и др. На их образование и развитие влияли также не только математические соображения, хотя последние и были решающими.

Понятие вероятности является понятием со сложным содержанием, все, о чем говорилось только что выше, внесло дополнительные трудности как в развитие самого понятия вероятности, так и в выяснение его сущности.

В соответствии с периодизацией развития понятия вероятности книга состоит из пяти глав — каждая глава освещает один период[1].

---

[1] Автор выражает глубокую благодарность В. Н. Судакову, который, прочитав работу в рукописи, сделал целый ряд ценных замечаний. Большая часть их была учтена автором, что сделало книгу более целостной и способствовало устранению ошибок. Большую помощь автору при работе над книгой оказала Э. К. Пирогова.

Глава 1

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ, МАТЕМАТИКЕ И ФИЛОСОФИИ ДО XVII В.

1. Вероятностные представления в античности

Разработка проблемы случайного и необходимого оказывала влияние на формирование вероятностных понятий в течение всего развития науки. Но у нас нет возможности проследить всю историю изучения и становления таких философских понятий, как «возможное», «закономерное», «случайное», «необходимое» и т. п., мы этих вопросов будем касаться только в небольшой мере, стараясь выделить наиболее существенное, оказавшее наибольшее влияние на формирование вероятностных понятий.

С вероятностными представлениями мы встречаемся еще в античности. Мы их находим как у материалистов, например, Левкипп (предположительно 500—440 гг. до н. э.), Демокрит (ок. 460 — 370 гг. до н. э.), и их последователей, так и у их противников, представителей античного идеализма во главе с Платоном (427 — 347 гг. до н. э.).

«В многообразных формах греческой философии уже имеются в зародыше, в процессе возникновения, почти все позднейшие типы мировоззрений» [Маркс, Энгельс, т. 20, с. 369]. Это в полной мере относится и к учению о случайном и необходимом. В античной науке встречаются уже почти все точки зрения на этот вопрос, которые впоследствии, иногда очень бурно, обсуждались в течение многих столетий. Одни считали, что всюду господствует случай, другие — что случаю нет места и все происходит в силу необходимости. Существовало мнение, что в явлениях большого масштаба господствует случай, а в других явлениях все объясняется необходимостью и причинностью; высказывались и другие точки зрения.

Мы прежде всего остановимся на взглядах Демокрита и его школы. К сожалению, до нас не дошло ни одного сочинения Демокрита. Фрагменты его трудов сохранились только в виде цитат и переложений у античных и средневековых авторов. С. Я. Лурье собрал и издал в отдельной книге [Лурье, 1970] упоминания о Демокрите и его учении, относящиеся к древности и средним векам. Тексты даны как на языке подлинника, так и в переводе на русский язык и снабжены подробными примечаниями и исследованиями автора.

Демокриту приписывали разные авторы противоречащие одно другому мнения. Некоторые считали, что он отрицал необходимость и превозносил случай, другие же полагали, что он признавал только необходимость.

Так, Фемистий пишет: «Разве не справедливо обвинять Демокрита и других? Самое важное они отвели на долю случая, а людям не придали ни малейшего значения, бесконечные небеса [т. е. *миры*] и вихрь, и предержащий миропорядок не возвели ни к какой другой причине, кроме случая и спонтанности» [Лурье, 1970, с. 212].

Об этом же говорит и Симплиций: «Но и Демокрит в следующих словах: „Вихрь разнообразных форм отделился от вселенной" [каким же образом и по какой причине, он не говорит], по-видимому, считает, что он рождается сам собой и случайно» [Материалисты Древней Греции, 1955, с. 67].

Аристотель следующим образом излагает ход мысли Демокрита: «Неправильно и не с точки зрения причинной связи определяют необходимость те, которые заявляют, что так происходит всегда, и полагают, что это и есть начало в этих [*явлениях*], как Демокрит из Абдер, утверждавший, что вечное и бесконечное не имеет начала, а причина есть начало, вечное же безгранично, поэтому спрашивать, какова причина какой-либо из таких вещей, по мнению Демокрита, то же, что искать начало бесконечного» [Лурье, 1970, с. 210—211].

Об этом же пишет и Филопон. «Некоторые ... причиной „нашего неба" и самого божественного из того, что мы видим, считают случай ... Демокрит считает причиной распорядка во [*всем*] сущем случай ... Они [сторонники Демокрита] утверждают, что такое движение атомов, из-за которого они отделяются друг от друга, произошло в силу случая. Так же и вихрь, приведший вселенную в тот порядок, который существует ныне и при котором вместе с небом вращается и воздух, а Земля вследствие быстрого вращения сохраняет свое положение в центре, равным образом возник спонтанно и случайно» [Там же, с. 212].

Но была и другая точка зрения, утверждающая, что все происходит благодаря необходимости и причинным связям. Приведем некоторые примеры.

Левкипп в сочинении «О разуме» пишет: «Ни одна вещь не происходит попусту, но все в силу причинной связи и необходимости» [Там же, с. 213]. Это же утверждает и Диоген Лаэрций: «Все ... происходит в силу необходимости» [Там же].

Цицерон (106—43 гг. до н. э.) последовательно выступал против точки зрения, утверждающей, что в окружающем мире все или некоторые явления происходят благодаря случаю, случайному сочетанию или столкновению тел. Он считал, что все в мире происходит только в силу необходимости. Цицерон заявлял: «Нет ничего более противоречащего разуму или определенности, чем случай» [Английские материалисты, 1967, т. 2, с. 378]. И в

другом месте: «Все происходит по определению судьбы, так что эта судьба приносит силу необходимости: этого мнения держались Демокрит, Гераклит, Эмпедокл, Аристотель» [Материалисты Древней Греции, 1955, с.67].

В своем сочинении «О природе богов» в «Речи стоика, направленной против эпикурейцев, считавших, что мир создан случайным столкновением атомов», Цицерон проводит интересное рассуждение о возможности составления определенного текста из случайно выбираемых букв алфавита, связывая этот пример с общими соображениями о возможности создания мира из случайного сочетания малых телец (атомов). Ввиду того, что пример с буквами алфавита часто упоминается в литературе, и не только математической (см., например, [Кагарлицкий, 1965, с.214]), вплоть до настоящего времени, мы приведем соответствующую цитату из Цицерона: «Как мне не подивиться тут, что находится кое-кто, убежденный, что какие-то тела, плотные и неделимые, носятся под действием силы тяжести, и мир получился самым красивым и прекрасным из-за случайного столкновения тел? Я не понимаю, как это считающие так не думают, что если бросать бесчисленное количество слепков двадцать одной буквы алфавита, сделанные из золота или из чего-нибудь другого, то они, упав на землю, сложатся в „Анналы“ Энния, так что их можно будет прочесть подряд; хотя я и сомневаюсь, окажется ли случай таким могущественным даже для одного стиха. Так как же они серьезно уверяют, что мир создан благодаря тельцам без цвета, без всякого качества (греки называют его ποιοτηϛ), которые лишены чувств и сталкиваются случайно?» [Cicero. De natura deorum, II, 37, 93—94][1].

Многие свидетельствуют о том, что Демокрит был также сторонником аналогичных взглядов, т. е. считал, что все в мире происходит в силу необходимости, что случайностей не существует совсем. Более того, можно найти высказывания о том, что детерминизм является характерной чертой демокритовского материализма. Так, например, Аэций пишет: «Парменид и Демокрит говорили, что все [*происходит*] в силу необходимости, необходимость — это то же, что судьба и справедливость, и провидение, и [*сила*], созидающая мир» [Лурье, 1970, с.213]. У Евсевия мы читаем: «Демокрит из Абдеры полагал, что искони в течение беспредельного времени все вообще — прошлое, настоящее и будущее — совершается в силу необходимости» [Материалисты Древней Греции, 1955, с. 67].

Аристотель (384 — 322 гг. до н. э.) неоднократно возвращается к Демокриту. В своей «физике» о взглядах Демокрита он говорит следующее: «Некоторые сомневаются, существует случай или

[1] Пер. Т. А. Лапиной. Здесь ссылка дана так, как принято в античной филологии: том, глава, параграфы по любому изданию.

нет. Они утверждают, что ничто не происходит случайно, но что есть некоторая определенная причина для всего того, относительно чего мы говорим, что оно произошло спонтанно и случайно. Так, например, если кто-нибудь случайно пришел на рынок и застал там человека, которого он хотел, но не рассчитывал увидеть, то причиной является то, что, желая что-либо купить, он отправился на рынок. Точно так же и во всех других [*событиях*], которые называют случайными, всегда можно найти [*определенную*] причину, а не случай. В самом деле, если бы случай что-либо значил, то воистину должно было бы казаться нелепостью и неразрешенным вопросом, почему никто из мудрецов древности, изучая причины возникновения и уничтожения, ничего не объяснил относительно случая, но, как кажется, и по их мнению, ничего не происходит случайно». Закончив изложение точки зрения Демокрита, Аристотель прибавляет от себя: «Но и вот что удивительно: многое и происходит, и существует случайно и спонтанно; эти мудрецы хорошо знают, что каждое [*из этих событий*] можно свести к какой-нибудь причине возникновения, как говорит древняя теория, отрицающая случай, и тем не менее часть [*этих событий*], по мнению всех людей, происходит случайно, а часть — не случайно» [Лурье, 1970, с. 213—214].

Как бы подводя итог этих несколько противоречивых оценок взглядов Демокрита на случайность и необходимость, Симплиций пишет: «Выражение „как говорит древняя теория, отрицающая случай“, как кажется, имеет в виду Демокрита: ибо Демокрит, хотя при объяснении возникновения мира, по-видимому, и прибегал к помощи случая, но для более частных [*явлений*] утверждал, что случай не является причиной ни одного из них, и сводил [*эти явления*] к другим причинам. Так, например, причиной нахождения клада он считает вскапывание [*земли*] или посадку оливкового дерева, причиной же того, что у лысого разбился череп, то, что орел сбросил [*на него сверху*] черепаху желая разбить ее щит» [Там же, с. 214]. И в другом месте у того же Симпликия мы находим: «Если кто-нибудь, почувствовав жажду, выпил холодной воды и стал здоров, то Демокрит считает причиной этого не случай, а жажду» [Материалисты Древней Греции, 1955, с. 68]. Симплиций считает, что следующее место у Аристотеля относится к Демокриту:

«Некоторые выставляют в качестве причины [возникновения] нашего неба и всех миров — случай. А именно [они говорят], что вихревое движение, которое произвело разделение [масс материи] и привело все в этот порядок, возникло само собой... А именно они говорят, что животные и растения не случайно существуют и возникают, но причина этого есть или природа, или ум, или что-нибудь другое в таком роде, ибо у каждого семени возникает не что попало, но из такого-то семени — оливковое дерево, а из такого-то — человек, небо же и самые божественные

из видимых [вещей] возникли сами собой; такой же причины, как у животных и растений, [у них] нет вовсе» [Там же].

В передаче Аристотеля Демокрит («некоторые») считает, что случай является причиной возникновения неба и мира, все же остальное в природе происходит закономерно. Это в какой-то мере напоминает позицию ряда ученых XVIII и XIX вв., которые считали, что случай есть мера нашего незнания, что случайно то, законов чего мы не знаем. Материалисты Древней Греции пытались объяснить все явления природы естественнонаучным способом, подходов же к объяснению происхождения мира у них не было совершенно, поэтому, естественно, этот вопрос они отнесли к случаю. Так, Аристотель говорит: «Некоторым же причиной кажется случай, непонятный для человеческого ума, как представляющий собой нечто божественное и слишком сверхъестественное» [Там же].

Сам Аристотель возражает против того, что в окружающей нас действительности нет случая. «Уничтожение случая влечет за собой нелепые последствия. Есть многое, что совершается не по необходимости, а случайно ... Если в явлениях нет случая, но все существует и возникает из необходимости, тогда не пришлось бы ни совещаться, ни действовать для того, чтобы, если поступить так, было одно, а если иначе, то не было этого» [Там же, с. 70].

Аналогичную характеристику взглядов Демокрита дает Дионисий, который пишет, что Демокрит «случай ставит владыкой и царем вселенной и божественных [*сил*]. Он заявляет, что совокупность вещей возникла в силу случая, но из человеческой жизни случай изгоняет и называет невеждами поклоняющихся ему» [Лурье, 1970, с. 214—215]. Сам Демокрит говорил: «Люди сотворили себе кумир из случая как прикрытие для присущего им недомыслия» [Там же, с. 216].

Верой в науки и ум звучат слова Стобея: «В жизни мудреца случай играет незначительную роль, самое же важное и самое главное [в ней] ум устроил и постепенно в течение всей жизни устраивает и будет устраивать.

Люди измыслили идол [образ] случая, чтобы пользоваться им как предлогом, прикрывающим их собственную нерассудительность. Ибо редко случай оказывает сопротивление разуму, чаще же всего в жизни мудрая проницательность направляет [к достижению поставленной цели]» [Материалисты Древней Греции, с. 69].

Понятие причинности у Демокрита и других греческих философов носило упрощенный характер. Они считали случайность субъективным понятием, прикрывающим человеческое незнание, а в результате этого необходимость приобрела характер предопределенности. Несмотря на эти недостатки, демокритовский детерминизм был крупным достижением древнегреческой философии. «Признание объективной причинности, необходимости, законо-

мерности в природе было одним из самых ценных достижений древнегреческой материалистической философии» [История философии, 1957, с. 97].

Против Демокрита и его последователей выступил Платон. В. И. Ленин, говоря о коренной противоположности материалистического и идеалистического лагерей в истории философии, первый лагерь называл «линией Демокрита», а второй —«линией Платона». Отвергая догадку материалистов о закономерностях в природе, Платон выступил против детерминизма с мистико-религиозным учением о целесообразности в природе, управляемой божеством.

Но, несмотря на это, Платон иногда излагал взгляды Демокрита и его школы по вопросу о случайном и необходимом. Приведем один пример. В «Законах» Платон пишет: «Огонь, вода, земля и воздух — все они существуют, как говорят, от природы и благодаря случаю, и ничто из них не существует благодаря искусству. Также и тела, следующие за ними,— это относится к земле, ее солнцу, луне и звездам,— возникли через посредство этих совершенно неодушевленных [веществ]. Каждое из последних носилось по случайной, присущей ему силе, и там, где они сталкивались, они как-то надлежащим образом прилаживались друг к другу: теплое к холодному или сухое — к влажному и мягкое— к твердому и вообще все вещества, которые случайно по необходимости смешались в смеси противоположных веществ. Вот таким-то способом возникло и небо в целом и все, что на небе, равно как все животные и растения. От этого же возникла и смена времен года. И все произошло, по учению их [Демокрита и его школы], не по причине ума и не благодаря какому-нибудь богу и не через искусство, но, как мы подчеркиваем, от природы и случайно» [Материалисты Древней Греции, с. 70].

Несмотря на то что вопрос о случайном обсуждался, как мы видели, в Древней Греции, он не послужил стимулом к выработке первоначальных вероятностных взглядов. В дальнейшем изучение случайных событий оказало существенное влияние на развитие вероятностных представлений. В Древней Греции этого не произошло в первую очередь потому, что случайность еще не приобрела определенных очертаний и характеристик. Случайные события как таковые вообще еще не рассматривались.

Интересно отметить, что прежде всего было обращено внимание на равновероятность, так как она оказалась наиболее простой из вероятностных понятий. Действительно, равновероятность мы можем представлять, не прибегая к понятиям вероятности или случайного события. Так же, например, мы можем хорошо представлять тела с одинаковым весом, не имея понятия о том, что такое вес; это же относится и к другим величинам: длине, площади, силе и т. п.

Наиболее полно принцип равновероятности был разработан в учении Демокрита, который называл его принципом «исономии»

(буквально — равноправие). Для характеристики этого принципа Лурье приводит два высказывания древних авторов: «Не более так, чем иначе» и «Почему скорее здесь и теперь, чем там и тогда» [Лурье, 1970, с. 207].

Один из важных выводов, который сделал Демокрит при помощи исономии, состоит в том, что, признав бесконечность пустоты, необходимо следует признать, что и материя бесконечна, так как нет никаких причин, чтобы она кончилась. Материя может с одинаковой вероятностью находиться в любой точке пустоты. Этот вывод Демокрита приводят многие античные авторы, например Филопон пишет: «Демокрит принял существование бесконечных миров, принимая, что пустота бесконечна. Ибо на основании какого принципа распределения одна часть пустоты была бы заполнена каким-либо миром, а другие — нет? Так что если мир существует в какой-либо части пустоты, то, очевидно, и во всей пустоте. Но так как пустота бесконечна, то бесконечны будут и миры» [Там же].

Аристотель, излагая взгляды Демокрита, как правило, не называет его имени. По поводу бесконечности материи Аристотель пишет: «Так как в мышлении „не может быть пробела", то кажется, что и число бесконечно, и математические величины, и то, что находится за пределами неба [*т. е. нашего мира*]. Если же это внешнее пространство бесконечно, то кажется, что и тело бесконечно [*т. е. число тел бесконечно*], и миры [*по числу*]. В самом деле, почему они [тела] скорее будут в одном месте пустоты, чем в другом? Так что если масса есть в одном месте, то она есть и повсюду. Равным образом, если существует бесконечная пустота и бесконечное пространство... то и тело необходимо должно быть бесконечным» [Там же].

Принцип исономии в древности использовался для доказательства многих положений, в частности для доказательства того, что атомы имеют бесконечное число форм. «Левкипп принял, что в элементах имеется бесконечное множество форм, так как „ничто не более такое, чем такое"... Левкипп и Демокрит утверждают, что число форм в атомах бесконечно, так как „ничто не более такое, чем такое". Такую причину бесконечности они приводят» [Там же].

Греческие ученые используют вытекающий из принципа исономии вывод, который мы бы назвали принципом недостаточного основания. Так, у Аристотеля имеется следующее рассуждение: «Истинность явлений для некоторых возникает из чувственных восприятий. Ибо они думают, что судить о том, что истинно, следует не по большинству или меньшинству мнений: одно и то же одним из отведывающих кажется сладким, а другим — горьким... да и каждому в отдельности не всегда представляется в восприятии одинаковым одно и то же. Итак, какие из этих представлений истинны и какие ложны, неясно: ибо не более истинны те или иные, но все одинаково» [Лурье, 1970, с. 207—208].

В этом высказывании можно усмотреть положительное отношение к оценке явлений «по большинству или меньшинству мнений». Кроме того, утверждается, что если о некоторых явлениях у нас недостаточно данных, то они равновероятны («не более истинны те или иные, но все одинаково»). Аналогичные рассуждения мы встречаем в XIX в. Так, Лаплас, например, говорил, что если монета не симметрична, то вероятность выпадения герба при ее первом бросании будет $^1/_2$, так как у нас нет никаких оснований давать предпочтение какой-нибудь из сторон монеты. Ошибочность таких рассуждений сейчас очевидна: если у нас нет сведений о явлении, то мы просто не знаем вероятности его появления, а не считаем его равновероятным с другими аналогичными явлениями.

Демокрит (и другие древнегреческие ученые) выдвигал принцип равновероятности на основании симметрии, который впоследствии широко использовался в науке. Так, для XIX в. было типично рассуждение такого вида. Вероятность выпадения при бросании определенной грани игральной кости равна $^1/_6$, так как у нас нет никаких оснований давать предпочтение какой-нибудь из них. Сейчас это рассуждение несколько видоизменяют, говоря о симметричности игральной кости, в других случаях говорят вообще, что равновероятность мы наблюдаем тогда, когда имеется (загадочная) симметричность явлений.

Но вернемся к древним грекам. О доказательстве неподвижности Земли Аэций писал: «Парменид и Д. говорят, что Земля остается в равновесии потому, что она равно удалена отовсюду [*т. е. от всех точек оболочки космоса*], ибо у нее нет причины, почему бы она стремилась двигаться „скорее сюда, чем туда“» [Лурье, 1970, с. 208]. Этого же вопроса касается и Аристотель: «Некоторые утверждают, что [*Земля*] остается неподвижной из-за симметрии, как из древних говорил, например, Анаксимандр, ибо предмету, помещенному в центре и симметрично расположенному по отношению к краям [*целого*], ничуть не в большей мере надлежит двигаться вверх, чем вниз или в стороны. А совершать движение в одно и то же время в противоположные стороны невозможно. Так что по необходимости он будет оставаться неподвижным» [Там же]. У Анаксимандра мы находим: «Земля же парит в воздухе, ничем не поддерживаемая, остается же на месте вследствие равного расстояния отовсюду» [Платон, 1970, с. 503].

На основании принципа равновероятности делает выводы и Платон. Так, в диалоге «Федон» в уста Сократа он вкладывает следующие слова: «Если Земля кругла и находится посреди неба, она не нуждается ни в воздухе, ни в иной какой-либо подобной силе, которая удерживала бы ее от падения,— для этого достаточно однородности неба повсюду и собственного равновесия Земли, ибо однородное, находящееся в равновесии тело, помещенное посреди однородного вместилища, не может склониться ни в ту,

ни в иную сторону, но останется однородным и неподвижным. Это первое, в чем я убедился» [Там же, с. 83].

Аристотель даже свой принцип инерции обосновывает, исходя из принципа равновероятности. «Тем, которые утверждают, что существует пустота как нечто необходимое, поскольку существует движение... придется считать, что невозможно, чтобы двигалось что бы то ни было, поскольку существует пустота. В пустоте необходимо должно отсутствовать движение, подобно тому как рассуждают принимающие неподвижность Земли из-за симметричного положения: ведь нет причины, „почему бы она двигалась сюда больше, а сюда меньше“, поскольку это пустота, в ней нет различий... Далее, никто не смог бы сказать, почему [тело], приведенное в движение, где-нибудь остановится: в самом деле, „почему оно скорее остановится здесь, чем там“. Следовательно, ему необходимо или оставаться в покое или нестись в бесконечность, если только не воспрепятствует что-нибудь более сильное» [Лурье, 1970, с. 208].

Все приведенные отрывки говорят о том, что уже античные авторы использовали принцип равновероятности в своих доказательствах. Следует подчеркнуть, что равновероятность и в дальнейшем будет играть существенную роль во многих вероятностных рассуждениях.

Наиболее крупным естественнонаучным достижением древнегреческого материализма был атомизм. Основатель его Левкипп сформулировал основное положение, согласно которому все в мире состоит из неделимых частиц и пустоты. Продолжателем учения Левкиппа был Демокрит (на вероятностных взглядах которого мы уже останавливались). Демокрит пошел дальше Левкиппа, все качественное многообразие окружающего мира он объяснял сочетаниями различных атомов, которые отличаются у него по форме, порядку и положению. Наивысшего развития древнегреческий материализм получил во взглядах Эпикура (341—270 гг. до н. э.). Эпикур довольно подробно останавливается на роли случайного в окружающем мире.

«У тел часто бывают, однако не постоянно сопутствуют им [случайные свойства, относительно которых не следует предполагать ни того, что они вовсе не существуют, ни того, что они имеют природу целого тела], ни того, что они относятся к числу предметов невидимых, ни того, что они бестелесны. Поэтому, употребляя это слово в наиболее обычном значении его, мы делаем ясным, что случайные свойства не имеют ни природы целого, которое мы, беря его в совокупности, называем телом, ни природы свойств, постепенно сопутствующих ему, без которых невозможно представить тело... Случайные свойства не постоянно сопутствуют телу. И не должно изгонять из области сущего это очевидное явление на том основании, что оно не имеет природы целого, с которым оно соединено, и природы постоянно сопутствующих свойств; и не следует думать, что они существуют самостоятельно —

потому что и это невозможно представить ни по отношению к ним, ни по отношению к постоянным свойствам, — но, как показывает чувственное восприятие, все их должно считать случайными свойствами тел, не постоянно сопутствующими им и, с другой стороны, не имеющими самостоятельного положения природы; но они рассматриваются так, как само чувственное восприятие показывает их своеобразие» [Материалисты Древней Греции, с. 192—193].

Итак, Эпикур не отрицает случайных свойств, но считает, что не они определяют предмет. Случайность не может повлиять на размеренную, разумную жизнь. Следуя законам природы, мы становимся «неустрашимыми перед случайностью» [Там же, с. 211], несмотря на то, что «одни события происходят в силу необходимости, другие — по случаю» [Там же, с. 212].

К этому рассуждению Эпикур возвращается неоднократно: «Случай редко мешает мудрецу; самые большие и самые важные дела устроил разум» [Там же, с. 215]. «Что касается случая, то мудрец не признает его ни богом, как думают люди толпы, — потому что богом ничто не делается беспорядочно, — ни причиной всего, хотя и шаткой, — потому что он не думает, что случай дает людям добро или зло для счастливой жизни ... В практической жизни лучше, чтобы что-нибудь хорошо выбранное потерпело неудачу, чем чтобы что-нибудь дурно выбранное получило успех благодаря случаю» [Там же, с. 212—213].

Эпикур ищет даже чисто логическое противоречие в позиции тех, кто защищает идею, что все происходит в силу необходимости и случаю вообще нет места: «Кто говорит, что все происходит в силу необходимости, тот не может сделать никакого упрека тому, кто говорит, что все происходит не в силу необходимости: ибо он утверждает, что это самое происходит в силу необходимости» [Там же, с. 221].

Развивая далее атомистическое учение, Эпикур все явления природы объяснял различными сочетаниями атомов. Он утверждал, что ничто не может произойти из ничего. Эпикур высказал теорию спонтанного (внутреннеобусловленного) отклонения атомов. К. Маркс в своей докторской диссертации «Различие между натурфилософией Демокрита и натурфилософией Эпикура» указал на глубокое философское значение спонтанного отклонения.

Дынник так характеризует эту теорию Эпикура: «В учении Эпикура о спонтанном отклонении в наивной форме была выражена догадка древнего грека о внутреннем источнике движения материи, была сделана первоначальная, стихийно-диалектическая попытка преодолеть фаталистическую тенденцию детерминизма Демокрита и, исходя из основ его атомистического материализма, усовершенствовав его, нанести решающий удар идеализму и теологии платоников» [Дынник, 1955, с. 33]. Свое учение о движении атомов Эпикур сопровождал утверждениями о том, что

необходимость, а не случайность является закономерным в природе.

«Учение Эпикура было последней великой материалистической школой древнегреческой философии» [Краткий курс истории философии, 1975, с. 76].

В период с конца III в. до н. э. государство Древнего Рима, став сильной военной державой, распространило свою власть на восток и на юг. После завоевания Римом Греции (146 г. до н. э.) более развитая греческая культура стала одним из источников древнеримской культуры. Это относится и к философии, и к естествознанию. Наиболее выдающимся достижением древнеримской философии и атомистики была поэма Лукреция Кара (ок. 99—55 гг. до н. э.) «О природе вещей». В этой поэме наиболее полно и систематически изложена античная атомистика, при этом Лукреций Кар не только передает взгляды Демокрита, Эпикура и других атомистов, но многие вопросы развивает самостоятельно дальше.

Все другие изложения античной атомистики дошли до нас в отрывочном виде.

Мы остановимся только на тех местах этой поэмы, в которых говорится о случайном поведении мельчайших частиц (атомов), о их влиянии на течение событий и о других вопросах, носящих вероятностный характер.

Лукреций считал, что весь мир создается в результате случайного столкновения атомов:

«Как же случилося то, что стеченье материи дало
Землю и своды небес, а также и моря глубины,
Солнца пути и луны,— разъясню я теперь по порядку.
Первоначала вещей, разумеется, вовсе невольно
Все остроумно в таком разместилися стройном порядке
И о движениях своих не условились раньше, конечно.
Если ж начала вещей во множестве, многоразлично
От бесконечных времен постоянным толчкам подвергаясь,
Тяжестью также своей гнетомые, носятся вечно,
Всячески между собой сочетаясь и все испытуя,
Что только могут они породить из своих столкновений,—
То и случается тут, что они в этом странствии вечном,
Всякие виды пройдя сочетаний и разных движений,
Сходятся так, наконец, что взаимная их совокупность
Часто великих вещей собой образует зачатки:
Моря, земли и небес, и племени тварей живущих»

[Лукреций, 1946, с. 307, стр. 416—431].

Лукреций неоднократно возвращается к этому вопросу:

«Дальше: откуда взялся у богов образец мирозданья,
Да и само представленье о людях запало впервые,
Чтобы сознание того, что желательно сделать, явилось?

Как же узнали они и о силе частиц изначальных,
И о возможностях их в сочетаниях между собою,
Если природа сама не давала примера творенья?
Ибо начала вещей во множестве, многоразлично
От бесконечных времен постоянным толчкам подвергаясь,
Тяжестью также своей гнетомые, носятся вечно,
Всячески между собой сочетаясь и все испытуя,
Что только могут они породить из своих столкновений.
И удивляться нельзя, что они в положенья такие
Между собою пришли и в такое движение, которым
Держится нынешний мир в постоянном своем обновленьи.
Если бы даже совсем оставались мне неизвестны
Первоначала вещей, и тогда по небесным явленьям,
Как и по многим другим, я дерзнул бы считать достоверным,
Что не для нас и отнюдь не божественной создана волей
Эта природа вещей...»

[Там же, с. 293—295, стр. 181—199].

Лукреций придает большое значение этому месту. Как мы видели, он даже некоторые выражения повторяет дословно. Аналогичное описание и объяснение мы встречаем еще один раз:

«Первоначала вещей, разумеется, вовсе невольно
Все остроумно в таком разместилися стройном порядке
И о движениях своих не условились раньше, конечно,
Но, многократно свои положения в мире меняя,
От бесконечных времен постоянным толчкам подвергаясь,
Всякие виды пройдя сочетаний и разных движений,
В расположенья они, наконец, попадают, из коих
Вся совокупность вещей получилась в теперешнем виде
И, приведенная раз в состояние нужных движений,
Много бесчисленных лет сохраняется так и при этом
Делает то, что всегда обновляется жадное море
Водами рек; и земля, согретая солнечным жаром,
Вновь производит плоды; и живые созданья, рождаясь
Снова цветут; и огни, скользящие в небе, не гаснут»

[Там же, с. 65, стр. 1022—1034].

Итак, по Лукрецию, весь наш мир произошел из случайного движения и столкновений «первоначала вещей» (атомов). В результате этого атомы, «всякие виды пройдя сочетаний», образуют наконец современный мир. Мы бы сказали, что, по Лукрецию, случайное движение атомов создало наиболее вероятную картину мира, которая «много бесчисленных лет сохраняется так», потому что это состояние мира является наиболее устойчивым состоянием. Эту устойчивость Лукреций Кар характеризует словами: «всегда обновляется жадное море водами рек; и земля, согретая

солнечным жаром, вновь производит плоды; и живые созданья, рождаясь, снова цветут; и огни, скользящие в небе, не гаснут».

Отметим здесь, что соображения относительно наиболее вероятной картины мира будут играть существенную роль в конце XIX в. у создателей статистической физики.

Одно из центральных мест теории античной атомистики — учение о первоначалах. Первоначала составляют тела и обладают многими свойствами современных атомов. Неотделимое свойство первоначал — их движение (так же как их тело и вес). «Первоначала можно сравнить в этом отношении с атомами света — фотонами современной физики, которые нельзя мыслить покоящимися» [Вавилов, 1947, с. 23]. Первоначала (атомы) всегда «пребывают в беспорядочном движении», «носятся», движутся «бесцельно и случайно», «носятся вверх и вниз в течение всей вечности», движутся «как попало». Характеристик, аналогичных характеристикам случайного движения атомов у Демокрита, у древних авторов можно найти довольно много (см. [Зубов, 1965]).

После общих рассуждений относительно первоначал Лукреций описывает картину движения пылинок в солнечном луче, которая ярко и вполне правильно передает основные положения теории броуновского движения:

«Вот посмотри: всякий раз, когда солнечный свет проникает
В наши жилища и мрак прорезает своими лучами,
Множество маленьких тел в пустоте, ты увидишь, мелькая,
Мечутся взад и вперед в лучистом сиянии света;
Будто бы в вечной борьбе они бьются в сраженьях и битвах,
В схватки бросаются вдруг по отрядам, не зная покоя,
Или сходясь, или врозь беспрерывно опять разлетаясь.
Можешь из этого ты уяснить себе, как неустанно
Первоначала вещей в пустоте необъятной мятутся.
Так о великих вещах помогают составить понятье
Малые вещи, пути намечая для их постиженья»

[Лукреций, 1946, с. 79—81, стр. 116—124].

Напомнив и описав само явление, Лукреций переходит к глубокому его объяснению и толкованию:

«Кроме того, потому обратить тебе надо вниманье
На суматоху в телах, мелькающих в солнечном свете,
Что из нее познаешь ты материи также движенья,
Происходящие в ней потаенно и скрыто от взора.
Ибо увидишь ты там, как много пылинок меняют
Путь свой от скрытых толчков и опять отлетают обратно,
Всюду туда и сюда разбегаясь во всех направленьях.
Знай же: идет от начал всеобщее это блужданье.
Первоначала вещей сначала движутся сами,
Следом за ними тела из малейшего их сочетанья,

Близкие, как бы сказать, по силам к началам первичным,
Скрыто от них получая толчки, начинают стремиться,
Сами к движенью затем понуждая тела покрупнее.
Так, исходя от начал, движение мало-помалу
Наших касается чувств, и становится видимым также
Нам и в пылинках оно, что движутся в солнечном свете,
Хотя незаметны толчки, от которых оно происходит»
[Там же, с. 81, стр. 125—141].

Здесь описаны главные положения броуновского движения. Вавилов [Вавилов, 1947, с. 24] отмечает, что Лукреций предваряет «на два тысячелетия Смолуховского, Эйнштейна и Перрена». Реньи [Реньи, 1970, с. 89] относительно этих строк Лукреция пишет: «Мне не известно какое-либо иное более поэтическое описание броуновского движения».

Образ пылинок, движущихся беспорядочно (случайно) в солнечном свете, восходит к пифагорейцам и Демокриту. Но Демокрит (как свидетельствует Аристотель) считал, что такой подвижностью обладают только сферические атомы, из которых состоит огонь и душа. Аристотель писал, что эти атомы имеют сходство с пылинками, которые видны в полосе света.

Любопытно, что наряду с пылинками, носящимися в воздухе, в античной литературе часто обращает на себя внимание образ толпы, в описании которой можно отметить отдельные моменты случайного движения и столкновений частиц. Приведем пример из Сенеки. «Демокрит говорит: подобно тому как на площади или на улице, пока малолюдно, люди гуляют без толкотни, а когда толпа собирается в тесном месте, начинается ссора, так как одни наталкиваются на других, так и в том пространстве, которым мы окружены, когда много тел заполняют небольшой объем, неизбежно одни наталкиваются на других, толкают их, отталкивают назад, переплетаются и сжимаются» [Лурье, 1970, с. 210]. Примерно то же говорит Фемистий: «Тела ... уступают место ... как [*уступают место*] проходящим через толпу» [Там же].

Можно усмотреть некоторый вероятностный подход и в следующих словах Антония Меллиса: «И хороший кормчий иногда терпит кораблекрушение, и доблестный муж иногда терпит неудачу» [Там же, с. 216].

Начиная с Аристотеля считалось, что случайность и возможность являются характеристиками поведения, свойственными только земным процессам. Чем явление ближе к совершенству, тем оно проще, а следовательно, закономернее. В первую очередь это относится к небесным телам, в движении которых недопустима никакая случайность.

Рассмотренные отрывки, высказывания и взгляды античных ученых говорят за то, что вопросы, связанные со случайным поведением элементарных частиц материи, вставали перед ними и обсуждались. Античные ученые рассматривали и другие проблемы,

связанные с вероятностными представлениями. И хотя античная наука не дошла до выделения понятия вероятности, вопросы, поднимаемые ею, в конечном итоге оказали существенное влияние в дальнейшем на формирование понятия вероятности.

2. Игры и вероятность

Существует широко распространенная точка зрения, что на формирование основных понятий теории вероятностей, в том числе и на понятие вероятности, решающее влияние оказали азартные игры. Многие авторы говорят при этом о влиянии азартных игр на развитие теории вероятностей, которое, естественно, невозможно без формирования ее основных понятий [1]. Но некоторые говорят прямо об основных понятиях теории вероятностей. Например, «Первые работы, в которых зародились основные понятия теории вероятностей, появились в свет в XVI—XVII вв. и были связаны с попытками создания теории азартных игр» [Гмурман, 1959, с. 6].

Из этой точки зрения следует, что основные понятия теории вероятностей, в том числе и понятие самой вероятности, зародились в XVI—XVII вв. и это было связано с азартными играми. Из дальнейшего изложения будет видна неполнота и ошибочность такой точки зрения.

Вопросы, связанные с историей азартных игр, рассматриваются в ряде работ (см., например, [David, 1955, Kendall, 1956]). Мы остановимся только на вопросах, относящихся к нашей теме.

Азартные игры появились в глубокой древности. Одними из первых были игры, связанные с бросанием астрагалов — костей из конечностей животных. Астрагалы были удобны для игры, так как они могли выпадать четырьмя различными сторонами. В археологических раскопках, уже в слоях, относящихся ко многим тысячелетиям до н. э., среди найденных костей животных астрагалы встречаются в несколько, а иногда и в несколько десятков раз чаще, чем другие кости. Примерно начиная с V тыс. до н. э. игра в астрагалы (а также и другие игры) зафиксирована в глиняных фигурках, барельефах и рисунках.

В древнем Египте была известна игра «гончие и шакалы». Один экземпляр этой игры, относящийся к XVIII в. до н. э., хранится в Британском музее в Лондоне. В комплекте этой игры имеются и астрагалы. Есть много свидетельств распространения азартных игр, в первую очередь при помощи астрагалов и игральных костей (кубиков с нанесенными на гранях точками), в Древней Греции и Риме.

В одной из игр бросались четыре астрагала и фиксировалось, какой стороной они выпадают. Худший исход (мы не знаем,

[1] Критику точки зрения о том, что теория вероятностей возникла из азартных игр, см. [Майстров, 1962, 1967].

какой) назывался «собакой», а иногда «грифом». Лучшим броском считался тот, при котором на четырех астрагалах выпадали различные стороны; такой бросок назывался «Венерой».

Выпадение различных сторон астрагалов при их бросании имеет устойчивую частоту. После многократных исследований астрагалов нами установлены следующие частоты выпадений различных сторон при бросании астрагалов. Частота выпадений широкой стороны с углублением равна 0,39; противоположной стороны 0,37; частоты выпадений двух оставшихся сторон равны по 0,12. Лучший бросок («Венера») не был наименее вероятным: $0{,}12^4 < 4!\ 0{,}12^2 \cdot 0{,}37 \cdot 0{,}39$. Можно заключить, что греки не подсчитывали возможности выпадения той или иной комбинации (т. е. вероятности), а отдавали предпочтения, исходя из других соображений (все грани разные). Вообще, игроки в азартные игры не производили подсчетов разных комбинаций очень долго. Это вызвано в первую очередь тем, что игроки в процессе игры менялись ролями и неравновероятность исходов каждому игроку была поочередно то выгодной, то невыгодной. Подсчеты вероятностей в азартных играх начались с того времени, когда в игре появилось два лагеря: хозяин и игроки. Их роли в игре были разными. Хозяину игру нужно строить таким образом, чтобы деньги между играющими перераспределялись (чтобы были выигравшие и проигравшие) и чтобы определенный процент денег играющих переходил неизменно к нему. Когда возникала такая ситуация, тогда и возникал подсчет вероятностей.

Азартные игры развивались в разных вариантах. Были известны игральные палочки, пластинки и другие приспособления для игры. Но самыми распространенными азартными играми были разнообразные игры в кости. В Древнем Риме игра была настолько распространена, что издавались законы, ее запрещающие или ограничивающие. И вопрос о том, почему никто в древности не отмечал, что в кубе в среднем любая сторона выпадала так же часто, как и любая другая, не является праздным. Дейвид, отвечая на этот вопрос, пишет: «Можно считать, что имеется два возможных объяснения: несовершенство костей и их использование в религиозных церемониях» [David, 1955]. Первое объяснение несостоятельно, так как априори можно было предположить, что грекам и римлянам под силу было сделать хороший (правильный) кубик. Это подтверждается и обследованием игральных костей древности (см. [Майстров, 1967]). Мы повторяем, что основная причина здесь состояла в том, что не было заинтересованных лиц в таком подсчете. Игра была бы безобидной (т. е. вероятности выигрышей для всех игроков равны), если бы кости и не были бы правильны; это не имело существенного значения для игры.

Игральные кости широко использовались для бросания жребия и предсказаний. Такие бросания не создавали стимула для создания теории, так как всякая попытка предвидеть результат

броска могла быть рассмотрена как попытка предсказать соответствующее божественное действие. А это уже был акт неверия в бога.

В средние века азартные игры имели в Европе не меньшее распространение, чем в древности. Но и здесь в течение многих столетий не было заложено представления о вероятности.

Относительно причин того, что азартные игры довольно долго не оказывали влияния на возникновение теории вероятностей, было сделано много предположений. Одно из них состоит в том, что многие азартные игры имели сложные правила, так что вероятность того или иного исхода не так-то просто было подсчитать. Так, например, во многих играх с астрагалами учитывалась не только сумма очков, но и из каких слагаемых получается эта сумма. Но, как мы считаем, основная причина состояла в том, что структура азартных игр не способствовала этому до тех пор, пока все играющие были в равных положениях.

Большая часть первых задач теории вероятностей была связана с азартными играми если не по существу, то по форме. Мы и сейчас при изложении начал теории вероятностей в педагогических целях обращаемся к азартным играм, ибо в таких задачах легко показать, как подсчитать вероятности тех или иных возможных исходов. Чаще всего мы пользуемся схемой урны с шарами. «Азартные игры [кости, монета, карты] недостаточно гибки. Более общий случай — это урна с шарами. Эта модель постоянно служит дидактическим инструментом в преподавании... Модель урны выражается тремя постулатами: 1) постоянство вероятностного распределения, обусловленное неизменностью свойств сосуда; 2) случайный характер выбора; 3) независимость последовательности выборов, когда вытаскиваемый шар возвращается» [Freudental, 1960, с. 212]. Азартные игры оказали влияние на развитие теории вероятностей, потому что они оказались удобной схемой с готовой терминологией, с помощью которой можно было описать многие явления и решать разнообразные задачи. Конечно, и практика игр выдвигала задачи, которые стимулировали развитие теории вероятностей. Но это не было решающим стимулом. Более того, на задачи из практики азартных игр стали обращать внимание только после того, как аналогичные задачи возникли в других областях человеческой деятельности [1].

Одной из первых задач, которую следует отнести к теории вероятностей, является подсчет числа различных возможных исходов при бросании нескольких игральных костей. Этой задачей интересовались в течение нескольких столетий, пока она окончательно не была решена. Эта задача оказала влияние на выработку понятия вероятности, которое выступало вначале в виде отношения шансов или отношения возможностей.

---

[1] Подробнее о роли азартных игр в теории вероятностей см. [Майстров, 1967].

Первые известные подсчеты количества различных исходов при бросании игральных костей относятся к X—XI вв. В средние века (вплоть до XV в.) встречаются поэмы, в которых каждому исходу при бросании трех костей соответствовал отдельный стих. Таких стихов было 56, что соответствует числу всех возможных исходов, не учитывая порядка, в котором появляются слагаемые.

Самая ранняя известная попытка подсчитать число возможных исходов при бросании трех игральных костей, включая и перестановки, встречается в поэме Ричарда де Форниваля (1200—1250) «De Vetula» [1]. В главе, посвященной спорту, он делает следующий подсчет. Одинаковое число очков на трех костях можно получить шестью способами; если число очков на двух костях совпадает, а третье от них отличное, то мы имеем 30 способов; если очки на всех костях различны, то мы имеем 20 способов; Итак, не учитывая перестановок, мы имеем 56 возможных исходов ($6 + 30 + 20$). Одинаковое число очков мы можем получить только единственным способом; два одинаковых числа очков, а третье отличное от них мы можем получить тремя способами; три различных числа — шестью способами. Из текста Форниваля следует, что общее число исходов с повторениями при бросании трех игральных костей будет: $6 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 216$, хотя прямо это число в поэме не указано. Любопытно, что наиболее простой способ нахождения этого числа — умножением всех возможных исходов при бросании двух костей (36) на 6 — ускользает от автора поэмы. Несмотря на то что в этой поэме количество исходов было подсчитано правильно, еще долгое время в задачах, связанных с пересчетом и указанием всех возможных исходов при бросании костей, часто допускались ошибки.

Так, например, Бенвенуто д'Имола в 1477 г. издал в Венеции «Божественную комедию» Данте. В комментариях к началу VI части «Чистилища», в котором Данте упоминает игроков в кости, д'Имола делает подсчеты возможных исходов при бросании трех костей. При этом он считает, что суммы 3 и 4 (так же как 17 и 18) могут появиться только одним способом. Действительно, 3 получается только одним путем: 1, 1, 1. Четыре же может появиться тремя способами: 2, 1, 1; 1, 2, 1; 1, 1, 2. Д'Имола не различал выпадения костей с повторениями, а поэтому не смог бы правильно пересчитать и всех исходов при бросании игральных костей.

Более специфической является задача о справедливом разделении ставки между двумя игроками, если игра прервана до выигрыша одним из игроков определенного числа партий или очков. Эта задача имеется у Луки Пачоли [2] (1445— ок. 1514), но она была известна и ранее. Основной труд Пачоли «Сумма знаний по

---

[1] Одно время автором этой поэмы считали Овидия, поэтому она была включена в некоторые средневековые издания его поэм.

[2] Пачоли писал свою фамилию или по-латыни Facciolus, или по-итальянски — Pacciuolo, или на тосканском диалекте — Pacioli. Этим объясняются встречающиеся различные написания его фамилии и на русском языке.

арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» был издан в Венеции в 1494 г. на итальянском языке [1]. В 1504 г. была переиздана одна часть ее: второе (полное) было в 1523 г. Эта книга явилась энциклопедией математических знаний своего времени. В главе «Необычайные задачи» [2] Пачоли поместил несколько задач на справедливый раздел ставки. Приведем содержание некоторых из этих задач.

Компания играет в мяч до 60 очков и делает ставку в 22 дуката. В связи с некоторыми обстоятельствами игра не может быть закончена, причем одна сторона в этот момент имеет 50, а другая 30 очков. Спрашивается, какую часть общей ставки должна получить каждая сторона?

Необходимо разделить ставку между игроками в том случае, когда один имеет пять выигранных партий, а другой — две, договорились же играть до шести партий.

Трое соревнуются в стрельбе из арбалета. Выигрывает тот, кто первый получит шесть первых мест. Ставка 10 дукатов. Когда первый имел четыре лучших попадания, второй — три, а третий — два, они не захотели продолжать стрельбу и решили справедливо разделить приз. Спрашивается, какой должна быть доля каждого?

Два игрока поставили по 105 ливров с условием, что общий выигрыш достанется тому, кто первый выиграет три партии. После того как первый игрок выиграл две партии, а второй одну, игра прервалась. Спрашивается, как распределить ставки?

Во всех таких задачах Пачоли делил ставку пропорционально набранным очкам (или партиям). Если два игрока к моменту прекращения игры выиграли соответственно m и n партий, то ставка делилась в отношении $m : n$ независимо от того, сколько партий им оставалось сыграть. Долгое время такое решение считалось правильным, хотя при этом ставки делились не в соответствии с вероятностями выиграть всю ставку при продолжении игры. Пачоли решал эти задачи без учета вероятностных соображений. Но задачи о справедливом разделении ставки сыграли в дальнейшем существенную роль в становлении теории вероятностей и в выработке понятия вероятности. Из вероятностных соображений Пачоли отметим только, что во всех задачах на разделение ставки им молчаливо предполагалась равновероятность выигрыша любой партии (очка) каждым из участников игры. Несмотря на то что решение задач он предложил простое, у него хватило проницательности назвать их необычными задачами [3].

---

[1] На первой странице этого издания книга называется так: «Suma de Arithmetica Geometria Proportioni r Proportionalita».

[2] Книга Пачоли делится на две части (арифметика и геометрия), каждая часть — на отделы, отделы — на трактаты, а трактаты — на главы.

[3] Пачоли как основателю науки о бухгалтерском учете посвящена довольно большая литература (см. [Пачоли, 1974], в которой имеется библиография). Его основной математической работе («Сумма...») и математическому творчеству вообще уделяется незаслуженно меньшее внимание.

3. Работы Д. Кардано и Н. Тарталья

Существенным шагом в развитии вероятностных представлений явилась работа Д. Кардано (1501—1576) «Книга об игре в кости», («De ludo aleae»). Она была найдена в бумагах Кардано в 1576 г., после его смерти, и опубликована в первом томе собрания сочинений, изданном в 1663 г. [Cardano, 1663]. Сам Кардано указывает, что эта работа была написана в 1526 г. Перевод этой работы на английский язык был опубликован в 1953 г. [Cardano, 1953] в качестве приложения к книге Оре [Ore, 1953].

В первой половине XVI в. появилось довольно много работ, относящихся к различным азартным играм, в частности к играм в кости. Как правило, они еще не касаются теоретических вопросов и не имеют прямого отношения к понятию вероятности. Их основная заслуга состоит в том, что они оказали соответствующее влияние на Кардано. В первую очередь это относится к работам Леоникуса (1456—1531) и Калькагнини (1479—1541).

Перейдем к рассмотрению интересующих нас разделов работы Кардано «Книга об игре в кости».

В главе XI, которая называется «О бросании двух костей», Кардано говорит: «При бросании двух костей возможны 6 случаев выпадения по два одинаковых числа очков и 15 случаев выпадения разного числа очков, т. е. считая и двойные 30, следовательно, всего возможно 36 случаев» [Cardano, 1663, с. 264].

Так Кардано находит число всех случаев при бросании двух игральных костей. При этом он отчетливо различает перестановки. Под двойными выпадениями он понимает, например, такие: на первой кости выпало 2, на второй 3 и, наоборот, на первой 3, а на второй 2.

Далее Кардано указывает число возможных случаев появления, по крайней мере на одной кости, определенного числа очков при бросании двух игральных костей. Число таких случаев 11. Далее Кардано пишет: «Число это — меньше, чем число случаев отсутствия данного числа очков. По отношению к общему числу случаев при бросании двух костей оно составляет больше одной шестой и меньше одной четверти» [Там же, с. 264]. У Кардано здесь описка, по-видимому, должно быть «и меньше одной трети». Действительно,

$$\frac{1}{6} < \frac{11}{36} < \frac{1}{3}, \text{ но } \frac{11}{36} > \frac{1}{4}.$$

Интересно отметить, что здесь Кардано говорит о дроби ($^{11}/_{36}$), которая является вероятностью рассматриваемого события.

При бросании двух игральных костей имеется всего 36 исходов, из которых 30 состоят из разного количества очков на костях, а 6 — из одинакового. Без повторений будет 15 исходов, и если прибавить 3 исхода с одинаковым числом очков, то мы получим 18, т. е. половину всех возможных исходов. Из этих 18 исходов

9 имеют разное число очков на костях и одновременно разную сумму числа очков на двух костях. Это у Кардано записано следующим образом: «В общее число восемнадцати входят пары равнозначных сочетаний разного числа очков, следовательно, может быть девять пар с разным числом очков» [Там же].

Относительно своего заключения о шести возможностях получить одинаковые числа очков на двух костях и 30 возможностях — разные он пишет: «Целая серия игр не дает отклонения, хотя в одной игре это может случиться ... при большом числе игр оказывается, что действительность весьма приближается к этому предположению» [Там же, с. 265].

Здесь Кардано говорит, что при малом количестве наблюдений частота может отклоняться довольно сильно от доли, или, другими словами,— от вероятности; при большом числе испытаний это отклонение будет незначительно. Этим самым он подошел к пониманию статистической закономерности и закона больших чисел. Оре отмечает [Ore, 1953, с. 170], что Кардано пользовался законом больших чисел в самой рудиментарной форме. Бобынин же, ссылаясь на те же места из работы Кардано, заявляет несколько преувеличенно, что «этот закон [закон больших чисел] уже с достаточною ясностью был выражен в XVI столетии Карданом в его статье „De ludo aleae“ » [Бобынин, 1914].

В главе XII «О бросании трех костей» Кардано пишет: «Одинаковое число очков на трех костях выпадает только одним способом, как и в предшествующем примере, стало быть, всего этих случаев 6. Пар же одинаковых чисел очков с отличающимся от них третьим числом очков — 30. А так как каждое такое сочетание можно получить тремя способами, то это составляет 90. Сочетаний из трех различных очков 20, они видоизменяются шестью способами, это составляет 120 бросаний, всего же комбинаций 216, а половина — 108» [Cardano, 1663, с. 265].

Мы видим, что здесь правильно подсчитано количество всех исходов при бросании трех игральных костей. Любопытно, что и Кардано не находит 216, как произведение $36 \cdot 6$. Далее Кардано объясняет, как получены все упоминаемые числа.

В этой главе решаются и другие задачи на подсчет различных исходов. Сравниваются количества некоторых исходов при бросании двух и трех игральных костей.

В главе XIII «О сложных числах, как до шести, так и свыше и, как для двух, так и для трех костей» Кардано очень близко подходит к подсчету вероятностей различных событий. Он пишет: «Десять очков может получиться из двух пятерок и из шестерки и четверки: последнее сочетание возможно при этом в двух видах; таким же образом девять очков может получиться из пятерки и четверки и из шестерки и тройки, так что это составляет $^1/_9$ часть всей серии [1] и две девятых ее половины; 8 же очков получа-

[1] Под серией Кардано понимает 36 всех возможных исходов при бросании двух костей и 216 исходов, если речь идет о трех костях.

ется из двух 4, из 3 и 5 и из 6 и 2. Всего же 5 возможных случаев составляют приблизительно $^1/_7$ часть из всей серии... 7 очков составляется из 6 и 1, из 5 и 2, из 4 и 3. Всего, стало быть, имеется 6 возможных случаев, составляющих $^1/_6$ часть всей серии. А 6 получается по такому же расчету, как и 8, 5 — как и 9, 4 — как и 10, 3 — как 11, и 2 — как 12» [Там же].

Фактически он здесь находит вероятности выпадения определенного числа очков при бросании двух игральных костей. $^1/_9$, $^1/_7$, $^1/_6$ — вероятности выпадения соответственно 9, 8, 7. Далее он отмечает, что $P(8) = P(6) \approx {}^1/_7$, $P(9) = P(5) = {}^1/_9$, $P(10) = P(4)$ и т. д. Правда, вероятность у него пока не отношение, а часть серии.

Выпишем все исходы при бросании двух игральных костей.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Количество выпадений единицы хотя бы один раз равно $5 + 6 = 11$. Эти случаи отделены чертой. Количество выпадений хотя бы один раз или двойки, или единицы равно 20. Это число получается прибавлением к 11 следующего меньшего нечетного числа — 9 ($20 = 11 + 9$). Количество выпадений хотя бы один раз или тройки, или двойки, или единицы равно соответственно $11 + 9 + 7 = 27$ и т. д.

После таблицы Кардано делает следующее заключение. «Если, стало быть, кто-либо заявит, что он желал бы получить 1, 2 или 3, то ты знаешь, что для этого имеется 27 шансов, а так как вся серия состоит из 36, то остается 9 бросаний, в которых эти числа очков не выпадут; таким образом, эти числа будут находиться в тройном отношении. Следовательно, при четырех бросаниях три выпадения будут благоприятны 1, 2 или 3, и только один раз не выйдет ни одного из этих трех чисел. Если тот, кто ждет выпадения одного из трех указанных чисел очков, поставит три асса [1], а другой один, то сначала первый выиграет трижды и получит три асса, а затем второй выиграет один раз и получит три асса; таким образом, в общем итоге четырех бросаний шансы их всегда сравняются. Стало быть, такие условия расчета в игре — правильны; если же второй из них поставит больше, то ему придется состя-

[1] Асс — древнеримская медная монета, первоначально равнялась 1 римскому фунту (либре) меди, постепенно вес асса уменьшился до 1/24 фунта (13,64 г).

заться в игре на неравных условиях и с ущербом для себя; а если он поставит меньше, то с барышом» [Там же, с. 266].

Далее рассматривается случай для 1, 2, 3 или 4 очков; а затем делается заключение, что «такой же расчет следует применять и при бросании трех костей» [Там же].

Как мы видели выше, Кардано понимает, что эти утверждения справедливы только тогда, когда игра будет продолжаться достаточно долго, но в этом месте он об этом не говорит. По существу, он приближается здесь к определению безобидной игры и к понятию математического ожидания.

В правиле для подсчета величины ставок Кардано вплотную подошел к определению вероятности через отношение равновозможных событий:

«Итак, имеется одно общее правило для расчета: необходимо учесть общее число возможных выпадений и число способов, какими могут появиться данные выпадения, а затем найти отношение последнего числа к числу оставшихся возможных выпадений, приблизительно в такой же пропорции определяются относительные размеры ставок для того, чтобы игра шла на равных условиях» [Там же].

Кардано в этом отрывке говорит, что если общее число возможных испытаний равно n, а число благоприятных испытаний m, то размеры ставок должны быть в отношении $m/(n-m)$. Ввиду того, что все примеры взяты из игр в кости, равновозможность случаев подразумевается. У Кардано говорится о «приблизительно» такой же пропорции ставок. Дело в том, что отношение $m/(n-m)$ в рассматриваемых задачах иногда бывает такое, что точно в денежных единицах его нельзя выразить. Таким образом, у Кардано ставки были пропорциональны вероятностям выигрыша. Пусть вероятность выигрыша для одного игрока будет $p = m/n$, проигрыша (что равносильно выигрышу для другого игрока)— $q = 1 - p = 1 - m/n = (n-m)/n$, тогда ставки должны быть пропорциональны отношению

$$p : q = \frac{m}{n} : \frac{n-m}{n} = \frac{m}{n-m}.$$

Далее рассматривается задача о выпадении определенного числа очков (двойки) по крайней мере один раз при бросании серии (216 раз) тремя игральными костями; при бросании двух и трех серий. «Пусть кому-либо необходимо, чтобы выпала одна двойка; этому числу ... соответствует 91, в остатке же 125, умножаем каждое из этих двух чисел в отдельности само на себя и получаем 8281 и 15625, т. е. соотношение, почти равное двум к одному... Если же при метании трех костей было бы необходимо выпадение какого-нибудь одного очка, то получится соотношение чисел 753 571 и 1 953 125; пропорции же этих чисел ближе всего к соотношению пяти и двух, но несколько его превышают» [Там же]. Здесь $753\,571 = 91^3$; а $1\,953\,125 = 125^3$. Кардано в этой задаче

использует теорему умножения вероятностей. Так, отыскивая величину ставок при двух сериях, он поступает следующим образом: $m/(n-m)$ возводит в квадрат и получает $m^2/(n-m)^2$, а это означает, что соответствующие вероятности находятся по теореме умножения:

$$p_1 = \frac{m}{n}\,\frac{m}{n} = \frac{m^2}{n^2}; \qquad q_1 = \frac{n-m}{n}\,\frac{n-m}{n} = \frac{(n-m)^2}{n^2},$$

а ставки пропорциональны этим вероятностям:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{m^2}{n^2} : \frac{(n-m)^2}{n^2} = \frac{m^2}{(n-m)^2}.$$

Аналогично он поступает и при трех сериях бросаний.

Далее следуют две главы, связанные с историей азартных игр. Кардано пишет о том, что азартные игры были изобретены во время Троянской войны Галамедом. Осада Трои длилась десять лет, и для спасения воинов от скуки были выдуманы игральные кости.

Кардано приводит много высказываний древних об игре в кости, а также разные приемы жульничества во время игры.

Далее рассматривается игра с астрагалами, причем считается, что различные стороны астрагала имеют значения 1, 3, 4, 6. Бросают четыре астрагала и подсчитывают количество благоприятных случаев при различных исходах. Кардано указывает, что бросок, при котором выпадает более одной единицы, «называется „собакой“ потому что, каковы бы ни были другие кости, бросок не может превысить среднего числа» [Там же, с.268], и отмечает, что средним числом при бросании четырех астрагалов будет 14. Это было бы справедливо в том случае, если бы вероятности выпадения различных сторон астрагалов были равны между собой.

Кроме «Книги об игре в кости», у Кардано имеются и другие работы, в которых он касается вероятностных вопросов.

В работе «Практика общей арифметики» («Practica arithmeticae generalis»), изданной в 1539 г. в Милане, Кардано обоснованно возражал Пачоли по поводу его решения задачи о справедливом разделении ставки. Он указывал, что Пачоли, деля ставку пропорционально числу уже выигранных партий, никак не принимает в расчет то число партий, которое еще необходимо выиграть каждому из игроков. Однако, правильно указав на ошибку Пачоли, Кардано сам не сумел найти верное решение этой задачи. Так, он считал, что если s — количество партий, до которого должна была продолжаться игра, p и q — количества выигранных партий партнерами, то ставку необходимо делить в отношении $[1+2+3+\ldots+(s-q)] : [1+2+3+\ldots+(s-p)]$.

В 1570 г. вышла книга Кардано с тремя его работами. В первой из них («Новый труд о пропорциональностях») содержится ряд задач, связанных с комбинаторикой.

Работы Кардано являются существенным шагом в развитии вероятностных понятий и представлений. Он сделал правильный подсчет количества всевозможных исходов как без повторений,

так и с повторениями, при бросании двух и трех игральных костей. Он подошел к пониманию статистической закономерности, высказал некоторые соображения относительно вопроса, который впоследствии будет назван законом больших чисел. Он, наконец, близко подошел к определению вероятности через отношение равновозможных событий и, используя представление о математическом ожидании, ввел, по существу, понятие безобидной игры.

Складывая шансы, Кардано фактически пользовался теоремой сложения вероятностей, учитывая при этом несовместимость событий.

Кардано также пользовался теоремой умножения вероятностей для независимых событий. Конечно, во всех этих случаях он не рассматривал вероятности, а подсчитывал ставки в безобидных играх, которые пропорциональны вероятностям. Однако сформулированное им правило для подсчета величины ставок уже достаточно близко к так называемому классическому определению вероятностей.

Существенное значение в становлении первоначальных вероятностных представлений имела работа Н. Тарталья (ок. 1499—1557) «Общий трактат о числе и мере» [Tartaglia, 1560], в которой он наряду с другими вопросами рассматривает задачу о справедливом разделении ставки. Этой задаче в книге Тарталья посвящен § 20 «Ошибка брата Луки из Борго» [1]. Он приводит текст одной задачи и решение Пачоли с его правилом деления ставки пропорционально числу уже выигранных партий.

Тарталья по этому поводу заявляет: «Это его правило мне не кажется ни красивым, ни хорошим, потому что, если бы случайно одна из этих сторон имела 10, а другая вообще не имела никакого количества очков, то, действуя по такому правилу, получилось бы, что одна сторона, имеющая указанные 10 очков, должна была бы взять все, а другая не получила бы ничего, что было бы совершенно лишено смысла».

Затем он пишет: «Разрешение такого вопроса является скорее делом юриспруденции, чем разума, так что при любом способе решения этой задачи здесь найдутся поводы для споров, но тем не менее наименее спорным, как мне кажется, будет следующее». Далее он решает несколько задач на справедливое разделение ставки. Приведем условия нескольких задач.

Играя до 60 очков, одна сторона набрала 10 очков, а другая 0. Как разделить ставку, если каждая сторона ставит по 22 дуката? [2].

При тех же условиях одна сторона набрала 50 очков, а другая 30.

---

[1] Пачоли родился в небольшом городке Борго Сан-Сепользкро; примерно в 1475 г. он постригся в монахи и принял имя брат (фра) Лука из Борго.

[2] Дукат — золотая монета, которую начали чеканить в Венеции с 1284 г. Вскоре ее вес установился в 3,5 г.

Двое играют до шести выигрышных партий. Один игрок имеет уже пять партий, а второй только три. Как разделить ставку, если игра прервана?

Все такие задачи Тарталья решал в соответствии со сформулированным им правилом. Тарталья считал, что отклонение от половины ставки должно быть пропорционально разности выигранных партий. Одна сторона получила половину ставки плюс еще некоторую сумму, вычисленную по указанному правилу, а другая сторона — половину ставки минус эту сумму.

Тарталья, как и Пачоли, задачи на разделение ставки решал обычными арифметическими методами, не прибегая ни к каким вероятностным рассуждениям. Поэтому его решение оказалось неверным, как и решения Пачоли и Кардано. Отметив правильно недостатки решения Пачоли, Тарталья заканчивает этот параграф словами: «Решение Пачоли является предметом с небольшим смыслом и с достаточным поводом для споров: многие ценят подобные шутки, потому что они дают повод противоречить им, не будучи в состоянии сами составлять их, и этим положим конец этой главе».

В той же книге [Там же] Тарталья рассматриваются вопросы комбинаторики, которые тесно переплелись с вероятностными вопросами в течение долгого времени. Тарталья определил число различных сочетаний из n элементов по m.

Он подсчитывает, сколькими способами могут рассесться 10 человек за столом, и находит, что это число равно $n = 10!$. Хотя Тарталья и не доказывает своего правила в общем виде, но заявляет: «Этого порядка действий я буду придерживаться, если бы было хотя бы 1000 человек или какое угодно число, потому что правило стремится к бесконечности» [Там же, ч. II, гл. 16, § 10].

Далее в работе Тарталья идет глава: «Общее правило автора, найденное в первый день поста 1523 г. в Вероне, чтобы уметь найти, сколькими способами может варьировать положение какого угодно количества костей при их метании».

В этой главе Тарталья устанавливает, что одна кость может выпасть шестью способами; две —21 способом; три — 56 и т. д. Для получения этих чисел он составляет ряды, в которых каждое число есть сумма соответствующих чисел предыдущего ряда:

1) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$;
2) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$;
3) $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$;
4) $1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126$;
5) $1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 = 252$;
6) $1 + 6 + 21 + 56 + 126 + 252 = 462$;
7) $1 + 7 + 28 + 84 + 210 + 462 = 792$;
8) $1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792 = 1287$.

Глава заканчивается словами: «При желании объяснить подробно в письменном виде происхождение всех вышеуказанных 6 членов прогрессии потребуется составить целую книгу. Но, действуя таким порядком, ты сможешь узнать, сколькими способами 10 000 костей смогут варьировать при их бросании».

Нетрудно видеть, что Тарталья предлагает для подсчета

количества всевозможных исходов (без повторений) при бросании k костей следующую формулу:

$$k)C_{k-1}^{0}+C_{k}^{1}+C_{k+1}^{2}+C_{k+2}^{3}+C_{k+3}^{4}+C_{k+4}^{5}=C_{k+5}^{5}=C_{6+(k-1)}^{k}.$$

В вероятностном отношении работа Тарталья представляет интерес, так как в ней подчеркивается неудовлетворенность предыдущими решениями задач на разделение ставки. Несмотря на то что Тарталья был далек от правильного решения этих задач, его рассуждения показывают, что они имеют свою специфику, хотя она еще и не была вскрыта ни Кардано, ни Тарталья, ни тем более Пачоли. Мы останавливаемся на этих задачах, так как они в дальнейшем сыграли важную роль в выработке вероятностных понятий.

Кроме того, следует отметить вклад Тарталья в комбинаторику.

4. Вопросы комбинаторики

Мы уже отмечали, что комбинаторика тесно связана с вероятностными понятиями, она оказала некоторое влияние на их формирование. До начала применения анализа бесконечно малых комбинаторика была основным аппаратом при решении вероятностных задач.

Уже в пифагорейской школе изучались треугольные числа вида $n(n+1)/2$, которые явились числами сочетаний по 2:

$$C_{n+1}^{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

В первые века нашей эры рассматривались более сложные числа — четырехгранные — числа сочетаний по 3.

Комбинаторика использовалась в связи с подсчетом различных комбинаций из долгих и кратких слогов в n-сложной стопе.

За два века до н. э. в Индии умели составлять так называемый треугольник Паскаля. Уже тогда были известны некоторые соотношения, например $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ и др.

В работе индийского математика Шридхары (IX — X вв). «Патиганита» имеется небольшой раздел, посвященный сочетаниям. Он состоит из двух правил и одной задачи.

«[Правила нахождения числа вкусовых оттенков].

[72] Числа от 1 до [данного] числа в обратном порядке следует разделить на эти же числа в прямом порядке, [полученные частные] следует по порядку перемножить. [Это дает число вкусовых оттенков]» [Шридхара, 1966, с. 173].

Шридхара здесь приводит правило для подсчета числа сочетаний из n элементов, взятых по $1, 2, \ldots, m, \ldots, n$.

Шридхара предлагает это правило записывать так:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2},\ \ldots,\ \frac{2}{n-1},\ \frac{1}{n}.$$

Если нужно подсчитать число сочетаний из n элементов по m, то из этого ряда дробей нужно взять m дробей и перемножить их, т. е.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}.$$

«[73] Для получения блюда из двух вкусовых оттенков следует по порядку к последующим прибавить первый [вкусовой оттенок], для получения 3 и более [вкусовых оттенков] следует предшествующий прибавить к остальным вкусовым оттенкам» [Там же, с. 174].

«[Пример 95]. Повар готовит различные блюда с шестью вкусовыми оттенками: острый, горький, вяжущий, кислый, соленый, сладкий. Друг, скажи, каково число всех разновидностей» [Там же, с. 173].

Эта задача имелась и у Магавиры (IX в.), предшественника Шридхары.

Неизвестный индийский комментатор (не позже XII в.) решает эту задачу Шридхары так:

Запишем по порядку числа от 6 до 1, т. е. 6; 5; 4; 3; 2; 1, а затем запишем их от 1 до 6, т. е. 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Разделим числа первого ряда на соответствующие числа второго ряда, получим

$$\frac{6}{1};\ \frac{5}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{6}.$$

$\frac{6}{1} = 6$ — число блюд с одним вкусовым оттенком; острый, горький, вяжущий, кислый, соленый, сладкий.

$6\cdot\frac{5}{2} = 15$ — число блюд с двумя вкусовыми оттенками: остро-горький, остро-вяжущий и т. д.

$15\cdot\frac{4}{3} = 20$ — число блюд с тремя вкусовыми оттенками: остро-горько-вяжущий, остро-горько-кислый и т. д.

$20\cdot\frac{3}{4} = 15$ — число блюд с четырьмя вкусовыми оттенками: остро-горько-вяжуще-кислый и т. д.

$15\cdot\frac{2}{5} = 6$ — число блюд с пятью вкусовыми оттенками: остро-горько-вяжуще-кисло-соленый и т. д.

$6\cdot\frac{1}{6} = 1$ — число блюд с шестью вкусовыми оттенками: остро-горько-вяжуще-кисло-солено-сладкий.

Итак, всего разновидностей будет

$$6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63.$$

Подобная задача имеется и у Нарайаны (XIV в.) (см. [Володарский, 1966]).

Бхаскара II (1114 — позже 1178) в сочинении «Венец науки» (ок. 1150) излагает приемы вычислений перестановок и сочетаний. Ему была известна формула $C_n^p = \binom{n}{p}$.

Нарайана (XIV в.) при подсчете стада коров, происходящего от одной коровы за 20 лет, нашел, по существу, число сочетаний с повторениями из n элементов по k.

Таблица биномиальных коэффициентов до восьмой степени имеется у китайского математика Чжу Ши-цзе (1303). Возможно, тогда была уже известна и общая формула для подсчета C_n^m.

Общая формула разложения бинома в случае натурального показателя встречается у Джемшида ал-Каши, но, по-видимому, она была известна еще Омару Хайяму (XI в.).

Леви бен Герсон в своем арифметическом труде (1321), написанном на древнееврейском языке, получил формулы для вычисления числа размещений из n по p (A_n^p), для вычисления перестановок ($P_n = n!$), для C_n^m, которые он вывел при помощи полной индукции. Он сформулировал правила, которые эквивалентны следующим формулам:

$$\frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}; \qquad \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}.$$

Но эти результаты Леви бен Герсона, по всей вероятности, не были известны его современникам, все они позже были открыты вновь.

М. Штифель (1487 — 1567) в своей книге «Курс арифметики» (1544) составил таблицу коэффициентов для членов разложения $(a + b)^2$, $(a + b)^3, \ldots, (a + b)^{17}$.

Подсчетами различных исходов занимались и при составлении анаграмм, получивших широкое распространение. Особенно усердно их составляли на религиозные тексты.

Подсчетом количества анаграмм и их составлением занимались многие. Иезуит Б. Богусий (1575 — 1619), проповедник в Лове, составляя анаграммы из одного стиха (Tot Tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera coelo), делит их по начальному слову: 54 начинаются одними словами, 25 — другими и т. д. Путеанус (Puteanus) в книге «Чудеса благочестия» (изд. в Антверпене) перечисляет все пригодные перестановки из того же стиха, число которых совпадает у него с числом звезд, по тогдашним представлениям. Это число — 1022 — переходило из одной работы в другую. Только французский математик Престе в своей книге «Элементы математики» увеличил это число вначале до 2196, а затем до 3267. Валлис в своей «Алгебре» установил его как 3096.

Мы остановились на некоторых результатах комбинаторики для того, чтобы было ясно, какими достижениями из этого раздела

математики могли пользоваться в дальнейшем, при подсчете различных исходов в той или иной задаче. Такие подсчеты (и переборы) играли существенную роль при решении первых вероятностных задач и при выработке понятия вероятности. Ведь даже одно из определений вероятности требует знания количества «всех возможных исходов». До настоящего времени для лучшего усвоения понятия вероятности в процессе преподавания часто прибегают к решению задач с подсчетом различного количества исходов, что нельзя сделать без применения формул комбинаторики.

5. Вероятностные представления в науке Средней Азии

Хотя развитию науки в Средней Азии за последнее время посвящено много работ, рассмотрением развития вероятностных вопросов почти никто не занимался. Только в книге Кубесова [Кубесов, 1974] имеется глава о вероятностных представлениях у аль-Фараби (870—950). В этой главе идет речь о трактовке по астрологии [аль-Фараби, 1972]. Содержание этого трактата рассмотрено как в работе Кубесова, так и в его примечаниях к трактату. Мы остановимся только на некоторых вероятностных моментах в рассуждениях аль-Фараби.

Относительно случайных явлений аль-Фараби пишет: «Явления и их состояния в мире — двух родов. Одни являния — те, по причине которых возникают и имеют место такие факты, как, например, тепло от огня и от Солнца у тел, находящихся рядом с ними и напротив их ... К другому роду относятся случайные явления [случайные явления — «явления, характеризующиеся совпадением». — *Прим. Кубесова*], причины которых неизвестны, как, например, смерть человека или его рождение при восходе Солнца или при его закате.

Каждое явление, у которого есть известная причина, предназначено, чтобы его узнали, овладели им и познали. У случайных же явлений нет путей к тому, чтобы оно было известно, определено и изучено со всех сторон окончательно» [Там же, с. 284—285]. Следовательно, случайные явления — это явления, причины которых неизвестны. Но это не значит, что случайные явления — субъективные понятия. Аль-Фараби обосновывает существование в мире случайности рассуждениями, аналогичные которым мы уже встречали в античности.

«Если бы в мире не было случайных явлений, причины которых не известны, то исчезли бы страх и надежда, а если бы они исчезли, то не было бы совершенно порядка ни в делах человеческих, ни в делах законности, ни в политике, потому что если бы не страх и надежда, то никто не приобретал бы ничего на завтрашний день, подчиненный не повиновался бы своему повелителю, а повелитель не заботился бы о своих подчиненных, и

никто не делал бы добро другому, и не слушались бы Аллаха, и не совершали бы благодеяния, потому что тот, кто знает о том, что неизбежно будет завтра, и будет усиленно добиваться того, чем он не воспользуется, глупый болтун» [Там же, с. 285—286] — вот, к каким неприятностям привело бы отсутствие случайности в мире.

Прежде всего аль-Фараби обращает внимание на равновероятные явления, т. е. на возможные явления, шансы «бытия и небытия которых равны и ни одно из которых не является более предпочтительным перед другим» [Там же, с. 286].

Случайные явления аль-Фараби подразделяет (не очень четко) на равновозможные, редко возможные, необходимые, невозможные и «возможные в большинстве случаев». В выделении последней категории присутствует некоторый статистический подход. Даже те явления, о которых думают, что они неизбежны, например сгорание в огне, являются только возможными в большинстве случаев. В дальнейшем аль-Фараби более подробно объясняет, что это означает, и стройные, в основном правильные положения начинают рушиться. Это доказывает, что ясности в статистическом подходе у аль-Фараби не было, хотя он и уловил некоторые моменты этого подхода. Приведем это объяснение аль-Фараби.

Явления, которые нам кажутся неизбежными, «возможны в большинстве случаев лишь по той причине, что действие имеет место при совпадении двух моментов, один из которых — готовность действующего элемента к оказанию влияния, а второй — готовность элемента, подвергающегося воздействию, к принятию этого влияния.

Пока нет совпадения этих двух моментов, совершенно не возникает ни действия, ни влияния. Так, например, в отношении огня, когда он не находит предмета, который может сгореть, хотя огонь является сжигающим», и т. д. [Там же, с. 288].

Самым тонким, пожалуй, замечанием является замечание аль-Фараби о различении возможного и неизвестного. «Возможное — неизвестное, но каждое неизвестное не есть возможное» [Там же, с. 289]. Непонимание этого приводит к ошибкам, и тогда «о возможном говорят, как о таковых двоякого рода: одни из них возможны по существу, другие — те, которые можно отнести к возможным по отношению к тому, кто их не знает.

Такое понимание стало причиной грубой ошибки и вредного смешения, так что многие люди не различают возможного и неизвестного и не знают природы возможного» [Там же].

Здесь аль-Фараби выступает против смешения объективного и субъективного подхода к возможному (случайному).

Из приведенных замечаний вероятностного характера у аль-Фараби можно заключить, что он отметил некоторые существенные элементы вероятностных понятий и рассуждений. Но никакого учения о вероятности или другой цельной концепции у аль-Фараби не было. Поэтому, отмечая заслугу Кубесова в том, что

он обратил внимание на вероятностные представления аль-Фараби, мы не можем согласиться с его явно завышенными характеристиками и оценками взглядов аль-Фараби по этим вопросам.

6. Философские вопросы и вероятностные представления

Вопросы о соотношении случайного и необходимого, о законе, о причинности и т. п. всегда находились в поле зрения философов и обсуждались ими. Философия часто затрагивала и непосредственно вероятностные вопросы: что такое вероятность, что представляет из себя статистическая закономерность, о чем говорит закон больших чисел. Все названные вопросы, а также ряд других, имеющих отношение к вероятностным понятиям, являются не побочными вопросами в философии — это один из коренных вопросов любой философской системы от древности до наших дней. Разработка вероятностных вопросов в философии влияла на формирование понятия вероятности, понятие вероятности, с другой стороны, стимулировало разработку философских проблем.

Мы уже видели, что в античной (неразделенной) науке вероятностные вопросы широко обсуждались такими крупнейшими учеными-философами, как Демокрит, Эпикур, Лукреций Кар и др.

У нас нет возможности рассматривать разработку вопросов, связанных с вероятностью, на всем протяжении развития философии. Мы ограничимся только отдельными примерами. В других главах книги мы также будем неоднократно обращаться к философским разработкам вероятностных вопросов.

Основой индийского учения суадвады, которое получило широкое распространение начиная с VI в., является возможность следующих семи утверждений относительно изучаемого явления:

1) может быть есть;
2) может быть нет;
3) может быть есть и нет;
4) может быть это неопределенно;
5) может быть это есть и тоже неопределенно;
6) может быть этого нет и тоже неопределенно;
7) может быть есть и нет и тоже неопределенно.

По учению суадвады эти семь категорий необходимы и вполне достаточны, чтобы полностью исчерпать все возможности знаний.

В четвертом положении сказано, что наряду с утверждением «есть» и отрицанием «нет» имеется еще возможность существования неопределенного. В этом можно видеть зарождение тех понятий, которые впоследствии привели к пониманию вероятности, так как здесь фактически утверждается существование области применимости вероятности. По этому поводу индийский статистик Махаланобис пишет: «Четвертая категория является сутью качествен-

ной стороны современной концепции вероятности» [Mahalanobis, 1957].

Естественно, что вероятностная сущность здесь выражена нечетко. В это время не было выработано еще никаких вероятностных понятий, область их применений также не была очерчена — все это только нащупывалось, часто в довольно туманных выражениях и рассуждениях, в недрах других наук. Даже значительно позже мы будем встречаться с очень нечеткими соображениями по этим вопросам, хотя в них и закладывалось то содержание, которое способствовало развитию вероятностных понятий из нечетких намеков в одно из центральных понятий современной науки.

Отметим попутно еще один интересный факт. В средневековых изложениях учения суадвады среди прочих вопросов содержится обсуждение поведения браминов, собирающих подаяния. Ставится вопрос: всегда ли брамин, получающий дары, заслуживает их? В ответе говорится что 10 из 100 браминов не заслуживают этих даров. Этот ответ явно усредненный, в нем можно усмотреть некоторый вероятностный подход.

Следы вероятностных рассуждений мы находим у целого ряда ученых и философов средневековья и эпохи Возрождения. Рассмотрим отрывок из сочинения Аквинского.

Фома Аквинский (кон. 1225 или нач. 1226—1274) — крупнейший представитель средневековой схоластики. Аквинский создал свою философскую систему, томизм, в которой, проводя разграничение между философией и религией, стремился поставить философию на службу религии. Он разграничивал знание и веру, считая необходимым достижение гармонии между ними.

В одном из своих основных трудов «Теологическая сумма» («Summa Theologiae»), который он писал в период с 1269 по 1272 г., Аквинский останавливается на соотношении случайного и необходимого в окружающем нас мире. Он формулирует пять доказательств, третье из них есть доказательство «от необходимости и случайности». Он исходит из того, что имеются вещи, которые могут как существовать, так и не существовать. Он пишет: «Мы обнаруживаем среди вещей такие, для которых возможно и быть, и не быть, обнаруживается, что они возникают и гибнут, из чего явствует, что для них возможно и быть, и не быть» [Аквинский, 1975, с. 147]. Таким образом, Аквинский утверждает, что существуют вещи, которые не являются необходимыми, т. е. они носят случайный характер. Но такие вещи не могут существовать вечно: «коль скоро нечто может перейти в небытие, оно когда-нибудь перейдет в него» [Там же]. Следовательно, утверждает Аквинский, в мире не все случайно, так как иначе со временем исчезли бы все вещи. «Если же все может не быть, когда-нибудь в мире ничего не будет. Но если это истинно, уже сейчас ничего нет... Итак, не все сущее случайно, но в мире должно быть нечто необходимое» [Там же]. Как мы видим, Фома Аквинский приходит к выводу, что

в мире должны быть как случайные, так и необходимые вещи. Но случайные вещи, существующие сейчас, ранее не существовали, так как когда-то в прошлом должна была исполниться возможность вещи не существовать, иначе она была бы необходимой вещью. Естественно встает вопрос: как случайные вещи возникли из ничего, из небытия? Фома Аквинский отвечает, что они не могли возникнуть сами собой, они требовали наличия необходимой причины, и эта необходимая причина могла быть только богом. «Необходимо положить некую необходимую сущность, необходимую самое по себе, не имеющую внешней причины своей необходимости, но самое составляющую причину необходимости всех иных; по общему мнению, это есть бог» [Там же].

Это рассуждение Аквинского Боргош опровергает следующим образом: «Это доказательство находится в явном противоречии с основными положениями науки, прежде всего с законом сохранения материи. Единичные вещи как конкретные формы материи исчезают, подвергаются взаимной трансформации, но материя не исчезает» и т. д. [Боргош, 1975, с. 74].

Нас в рассуждении Фомы Аквинского интересуют его утверждения, что в мире есть необходимые и случайные вещи и что последние (это вещи, которые могут существовать или не существовать), существующие сейчас, обязательно когда-нибудь не будут существовать. Другими словами, события даже с малой вероятностью когда-нибудь обязательно произойдут. С вероятностной точки зрения рассуждениям Ф. Аквинского не хватает перехода от неясного понятия случайной вещи к случайным событиям. У Аквинского под случайным событием мы можем трактовать только появление и исчезновение случайной вещи. Сам Ф. Аквинский этого не сделал.

Рассуждения Фомы Аквинского о случайных и необходимых вещах представляют определенный интерес, как некоторый шаг в выяснении природы случайного.

Следы вероятностных рассуждений мы находим и у замечательного французского ученого XIV в. Н. Орема (ок. 1323—1382). В трактате «Вопросы о четырех книгах (Аристотеля) „О небе и мире“» Орем обсуждает вопрос о подвижности Земли. Он пишет: «Спрашивается, всегда ли Земля покоится в центре мира.

Утверждаю, что нет, так как у всех тел природы есть или может быть некоторое естественное движение, следовательно, или Земля совершает естественное движение, или может его совершать. И если она может совершать естественное движение, то необходимо, чтобы она когда-нибудь двигалась, ибо непристойно было бы сказать, что природная возможность оставалась бы праздной целую вечность и никогда бы не перешла в действительность» [1].

Здесь идет речь о том, что возможность обязательно когда-

---

[1] Цит. по кн.: *Веселовский*, *Белый*, 1974, с. 63.

нибудь перейдет в действительность, т. е. события, которые имеют даже малую вероятность, если наблюдения производить достаточно долго, должны произойти.

В 1459 г. в Кракове был написан так называемый «Краковский комментарий» к произведению Аристотеля «О небе». В нем высказываются робкие и наивные соображения о возможности движения Земли. Мы на этот комментарий обращаем внимание потому, что для своих доказательств автор привлекает некоторые вероятностные рассуждения. Так, мы читаем: «Можно привести для убеждения некоторые аргументы... движение получается вследствие нужды, следовательно, то, у которого больше нужды, больше должно и двигаться, а Земля нуждается в большем, чем небо... лучше объяснить явление при помощи меньшего предположения, чем большего» [Веселовский, Белый, 1974, с. 65].

В этих рассуждениях можно усмотреть начала принципов, которые были сформулированы значительно позднее. Например, утверждения о том, что вероятность малых отклонений при наблюдениях больше вероятности больших отклонений.

Приведем еще некоторые высказывания английского философа Т. Гоббса (1588—1679), которые можно отнести к вероятностным рассуждениям. Гоббс полностью отрицает случайные события.

«Представим себе здесь далее самое случайное происшествие, например выпадение равного числа очков на обеих костях при игре в кости, и посмотрим, не был ли результат обусловлен необходимыми причинами еще до того, как кости были брошены. Так как указанный эффект получился в результате бросания, то он имел начало и, следовательно, причину, достаточную для его произведения. Эта достаточная причина заключалась частью в костях, частью в таких внешних вещах, как положение частей руки, степень силы, примененной при бросании, положение частей стола и т. п. В общей сложности здесь было все, что требуется, чтобы произвести указанный результат, и, следовательно, результат был необходимо обусловлен. Ибо если бы результат не наступил, то это указывало бы на отсутствие чего-то, что требуется для его производства, и, следовательно, причина не была бы достаточной. Таким же образом может быть доказано, что всякое другое происшествие, каким бы случайным или произвольным оно ни казалось, произошло в силу необходимости» [Гоббс, 1926, с. 141].

Вероятность связана со случайными событиями, поэтому, отрицая случайность, нельзя прийти к вероятностным соображениям. Только значительно позже, исходя из отрицания случайности, вероятность стали определять с субъективных позиций, как меру нашего незнания.

Интересно отметить, что Гоббс, отрицая случайность, пришел к некоторым вероятностным представлениям исходя из статистических соображений. Он считал, что, как бы часто ни наблюдалось какое-нибудь явление, этого еще недостаточно для достоверного знания. Гоббс считает, что определить при помощи наблюдений

все обстоятельства, вызывающие то или другое явление, нельзя, так как таких обстоятельств бесчисленное множество.

Гоббс говорит о том, что признаки какого-нибудь явления бывают «только гадательны, и в зависимости от того, насколько часто или редко они нас обманывали, они бывают достоверны в большей или меньшей степени, но никогда не обладают несомненностью и очевидностью. Ибо, хотя человек до настоящего времени постоянно наблюдал, что день и ночь чередуются, он, однако, не может отсюда заключить, что они таким же образом чередовались всегда или будут таким же образом чередоваться во веки веков». Далее Гоббс делает вывод: «*Из опыта нельзя вывести никакого заключения, которое имело бы характер всеобщности.* Если признаки в двадцати случаях оказываются верными и только в одном обманывают, то человек может ставить в заклад двадцать против одного за то, что предполагаемое явление наступит или что оно имело место, но он не может считать свое заключение безусловной истиной» [Там же, с. 229—230].

Это рассуждение Гоббса вероятностное по своему характеру. Ведь его числа (20 и 1) — явно усредненные числа при многократных наблюдениях, и дробь $^1/_{20}$ есть фактически вероятность рассматриваемого события.

Глава 2

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРВЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПОНЯТИЙ

1. Вероятностные представления у основателей теории вероятностей. Паскаль, Ферма

До середины XVII в. не было никакого общего метода решения вероятностных задач, не говоря уже о цельной математической теории, решались лишь отдельные задачи, однако уже был собран довольно обширный материал в различных областях человеческой деятельности, относящийся к вероятностной тематике.

В середине XVII в. в разработку вопросов теории вероятностей были вовлечены крупнейшие ученые, в первую очередь здесь следует назвать Паскаля, Ферма и Гюйгенса. Из основных принципов теории вероятностей они уже применяли теоремы сложения и умножения, владели такими понятиями, как зависимость и независимость событий. Они ввели одно из основных специфических понятий теории вероятностей — математическое ожидание.

В это время создаются методы решения вероятностных задач, определяется круг вопросов, которыми должна заниматься новая наука, а также вырабатываются ее основные понятия — теория вероятностей превращается в науку. В целом это был период овладения материалом, и в этом развитие теории вероятностей не отличается от развития всего нового естествознания. «Первый период нового естествознания заканчивается — в области неорганического мира — Ньютоном. Это — период овладения наличным материалом» [Маркс, Энгельс, т. 20, с. 509].

Паскаль и Ферма начали обсуждение вероятностных вопросов в своей переписке. Их письма по этим вопросам получили в дальнейшем широкую известность.

Переписка Б. Паскаля (1623—1662) и П. Ферма (1601—1665) была существенным шагом в развитии теории вероятностей и в выработке основных вероятностных понятий. Эта переписка относится к 1654 г., она была впервые опубликована в 1679 г. в Тулузе. Центральное место в ней занимает решение задачи о справедливом разделении ставки. К большому сожалению, часть писем утеряна [1]. Сохранившиеся письма полностью опубликованы в со-

[1] Первое письмо Паскаля к Ферма утеряно, сохранился ответ Ферма (без даты) на это потерянное письмо. Сохранились: второе письмо Паскаля от 29 июля 1654 г. и ответ на него Ферма от 9 августа, третье письмо Паска-

чинениях Ферма [Fermat, 1894]; письма Паскаля — в собрании его сочинений [Pascal, 1908]; по частям и в отрывках они публиковались неоднократно и на русском языке (см., например, [Хотимский, 1936, Майстров, 1967].

В этой переписке они оба — и Паскаль и Ферма — пришли к верному решению задач на разделение ставки, хотя их рассуждения внешне были различны.

Свое решение задачи Паскаль наиболее полно изложил в письме от 29 июля 1654 г. Приведем небольшой отрывок из этого письма.

«Вот примерно, что я делаю для определения стоимости каждой партии, когда два игрока играют, например, на три партии и каждым вложено в игру по 32 пистоля [1].

Предположим, что один выиграл две партии, а другой одну. Они играют еще одну партию, и если ее выиграет первый, то он получает всю сумму в 64 пистоля, вложенную в игру; если же эту партию выигрывает второй, то каждый игрок будет иметь 2 выигранных партии, и, следовательно, если они намерены произвести раздел, каждый должен получить обратно свой вклад в 32 пистоля.

Примите же во внимание, монсеньер, что если первый выиграет, то ему причитается 64; если он проиграет, то ему причитается 32. Если же игроки не намерены рисковать на эту партию и хотят произвести раздел, то первый должен сказать: «Я имею 32 пистоля верных, ибо в случае проигрыша я их также получил бы, но остальные 32 пистоля могут быть получены либо мной, либо Вами. Случайности равны. Разделим же эти 32 пистоля пополам, и дайте мне, кроме того, бесспорную сумму в 32 пистоля» [Хотимский, 1936, с. 144]. Итак, первый должен получить 48 пистолей, а второй — 16. В этом же письме Паскаль рассматривает и другие случаи: как разделить ставку при игре до трех партий, если первый игрок выиграл одну партию (две партии), а второй не выиграл ни одной. Эти задачи решаются аналогичными рассуждениями. Во всех случаях Паскаль делит ставку пропорционально вероятностям выигрыша при продолжении игры. Метод решения Паскаля оригинален, но его трудно применить к более сложным случаям.

Метод решения Ферма этой же задачи можно установить из письма Паскаля от 24 августа [Pascal, 1908, с. 226—231]. Письмо Ферма, в котором он излагает свой способ решения, не сохранилось. Ферма решал следующую задачу: Пусть до выигрыша всей

ля от 24 августа и письмо Ферма от 29 августа, а также его ответ от 25 сентября на третье письмо Паскаля и четвертое письмо Паскаля от 27 октября 1654 г.

[1] Пистоль — испанская монета, чеканка которой началась в XVI в. Вес ее до 1786 г. равнялся 6,2 г. С 1641 г. пистоли начали чеканить во Франции, а затем в Италии и Германии. В XVII в. название пистоля получили почти все золотые монеты, вес которых равнялся весу испанского пистоля.

встречи первому игроку (A) недостает двух партий, а второму (B) — трех партий. Если игра прервана, то как справедливо разделить ставку?

Ферма рассуждает следующим образом. Игра может продолжаться максимум еще четыре партии. Обозначив буквой **a** выигрыш партии для игрока A, а буквой **b** — для B, составим таблицу возможного протекания этих четырех партий.

a	a	a	a	1
a	a	a	b	1
a	a	b	a	1
a	a	b	b	1
a	b	a	a	1
a	b	a	b	1
a	b	b	a	1
a	b	b	b	2
b	a	a	a	1
b	a	a	b	1
b	a	b	a	1
b	a	b	b	2
b	b	a	a	1
b	b	a	b	2
b	b	b	a	2
b	b	b	b	2

Из 16 возможных исходов 11 благоприятны для выигрыша игроком A всей встречи (в таблице они отмечены цифрой 1), а для выигрыша B имеется только 5 благоприятных исходов (в таблице они отмечены цифрой 2).

Следовательно, $^{11}/_{16}$ ставки должен получить A и $^{5}/_{16}$ — B. Отчетливо видно, что Ферма предлагает разделить ставку пропорционально вероятностям выигрыша всей встречи (а с нею и всей ставки).

Ферма тем же методом находит, что в случае трех игроков, из которых первому для выигрыша недостает одного очка, а двум другим недостает по два очка, ставку необходимо делить в отношении 17 : 5 : 5. В этом письме Паскаль находит тот же ответ и своим рассуждениям.

Несмотря на остроумие, проявленное Паскалем и Ферма при решении задач на разделение ставки, и полученный правильный результат, общего метода в своих письмах они не выработали. При решении таких задач им пришлось применить не совсем обычные рассуждения. И хотя они в скрытой форме употребляли понятия вероятности, теоремы сложения и умножения вероятностей, они их не выделили как новые понятия и новые свойства.

Более того, Паскаль не видел ничего общего в своем решении и в решении Ферма. В письме от 27 октября Паскаль писал: «Сударь, я очень доволен Вашим последним письмом, я любуюсь методом в отношении партий, тем более, что я его хорошо понимаю, он полностью Ваш, *ничего общего не имеет с моим* [выделено мною. — *Л. М.*] и легко приводит к той же самой цели» [Pascal, 1908, с. 235]. Но методы Паскаля и Ферма, по существу, тождественны. Паскаль (как и Ферма) не выделил понятия вероятности, поэтому он не мог увидеть, что ставку как он, так и Ферма делили пропорционально вероятностям.

В это же время Паскаль работает над своим «Трактатом об арифметическом треугольнике» («Traité du triangle arithmétique»), который был опубликован посмертно в 1665 г. (см. [Pascal, 1908, с. 243—268]. В этом трактате в параграфе «Использование арифметического треугольника для определения партий, которые необходимо сделать между двумя игроками, которые играют большое количество партий» Паскаль применяет арифметический треугольник, впоследствии названный его именем, к решению задачи о разделении ставки.

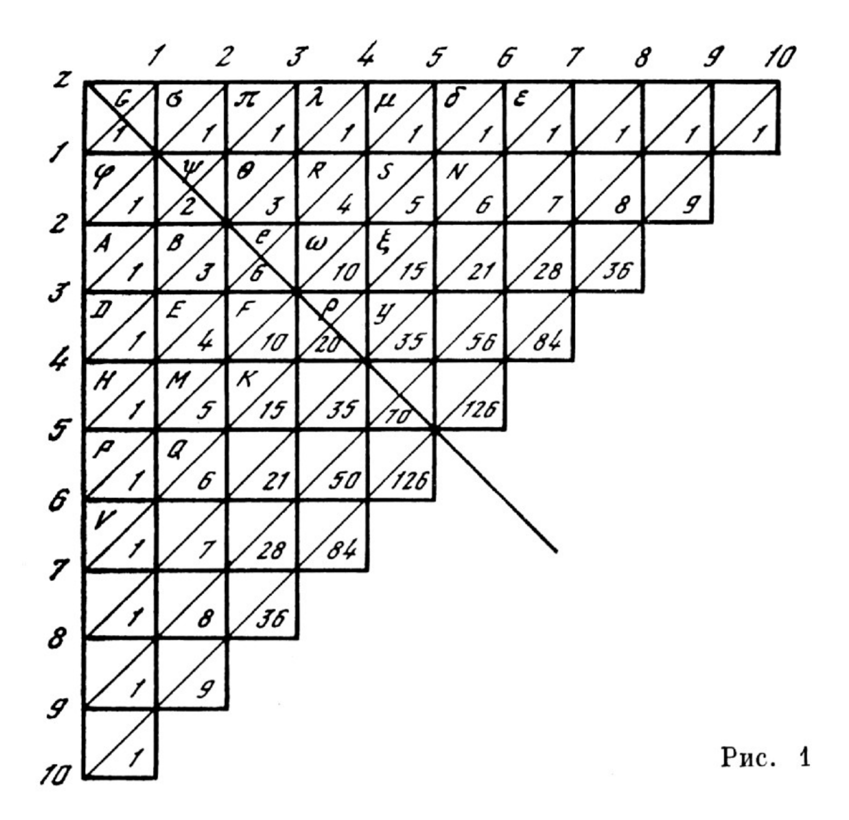


Рис. 1

Арифметический треугольник Паскаль записывает в следующем виде (рис. 1).

Числа, расположенные по диагоналям, являются коэффициентами при разложении $(a+b)^n$. Аналогичные таблицы до Паскаля составляли многие, но никто не применял их к решению задач, связанных с подсчетами различных шансов.

При помощи своего треугольника Паскаль решает задачу о разделении ставки между двумя игроками следующим образом.

Вначале складывается количество недостающих партий первому и второму игрокам. Затем берется та диагональ таблицы, в которой количество членов равно найденной сумме. При этом доля первого игрока в разделении ставки будет равна сумме членов найденной диагонали, причем количество слагаемых равно числу недостающих партий второму игроку, а доля второго игрока равна такой же сумме, только количество слагаемых будет равно числу недостающих партий первому игроку.

Например, игроку A недостает трех партий, а игроку B недостает четырех партий: $3+4=7$. Выписываем диагональ, в которой находится семь чисел. Это будет 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Доля игрока A будет $1+6+15+20=42$, а доля B $1+6+$ $+15=22$. Следовательно, ставку нужно разделить в отношении $42/22=21/11$. При таком решении ставка делится пропорционально вероятностям выиграть ставку для игроков A и B. Действительно, при продолжении игры может быть сыграно не более шести партий.

Для A благоприятных исходов будет следующее количество:

$$1 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 = 42,$$

где 1 — один исход, когда все шесть последующих партий выигрывает A; C_6^1 — шесть возможных исходов из шести последующих партий, когда A выигрывает пять партий; C_6^2 — 15 возможных исходов из последующих партий, когда A выигрывает четыре партии; C_6^3 — 20 возможных исходов из последующих партий, когда A выигрывает три партии.

Всех же исходов будет $2^6 = 64$. Следовательно, вероятность того, что всю ставку получит A, равна 42/64. Аналогично получаем, что вероятность того, что всю ставку получит B, равна 22/64. Следовательно, всю ставку необходимо делить в отношении

$$\frac{42}{64} : \frac{22}{64} = \frac{42}{22} = \frac{21}{11}.$$

Эти соотношения Паскаль выписывает при помощи букв, которые для этого помещены в соответствующих клеточках таблицы. Так, для случая, когда одному игроку недостает две партии, а другому — четыре, Паскаль выписывает их доли в виде

$$\frac{P+M}{P+M+F+\omega+S+\delta},$$
$$\frac{F+\omega+S+\delta}{P+M+F+\omega+S+\delta}$$ [Pascal, 1908, с 262].

Для случая, когда недостающих партий будет три и одна, доли записаны в виде

$$\frac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}, \qquad \frac{D}{D+B+\theta+\lambda}$$ [Там же, с. 263].

Паскаль рассматривает еще несколько подобных случаев.

Арифметический треугольник в этих решениях служил Паскалю для быстрого и удобного подсчета количества различных исходов. Хотя этот способ решения задачи на разделение ставки и несколько более общий, чем предыдущие приемы, но он ограничен только двумя игроками и количеством диагоналей выписанного треугольника. Паскаль и при этом решении не выделяет понятия вероятности и специфических вероятностных теорем.

Литература, посвященная Паскалю и Ферма и их роли в становлении теории вероятностей, довольно обширна. Но в ней часто встречаются необоснованные утверждения и гипотезы, которые искажают картину первых шагов новой науки, т. е. того сложного процесса, когда впервые ставятся задачи, которые требуют новых методов и подходов к их решению, когда начинают, вначале несознательно, выделяться новые понятия.

Мы остановимся на широко распространенной книжке А. Реньи «Письма о вероятности», которая рассматривает эти вопросы. Она

вышла в Будапеште в 1969 г. [Rènyi, 1969a], в том же году была переведена на немецкий язык [Rènyi, 1969б], а в 1970 г. вышла в русском переводе [Реньи, 1970]. В книжке идет речь о не дошедших до нас письмах Паскаля, адресованных Ферма. Реньи делает предположение, что после последнего дошедшего до нас письма от 27 октября 1654 г. Паскаль отправил Ферма еще несколько писем. Это могло произойти между 28 октября и 23 ноября, так как 23 ноября произошел решительный поворот в жизни Паскаля — его второе обращение к вере. Паскаль с этого дня почти полностью отошел от науки и вступил в теологическую борьбу против иезуитов, встав на сторону янсенитов.

Реньи приводит в своей книжке несуществующие письма, которые мог бы написать Паскаль. При этом Реньи заявляет: «Я стремился сохранить историческую правду, по возможности избежать анахронизмов и выдержать стиль, который соответствовал бы изображаемой эпохе», и немного далее: «Дорогой читатель, я сделал все, что было в моих силах, чтобы Вы поверили в возможность написания этих писем. Разумеется, я был далек от мысли обмануть Вас и заставить думать, что Вы читаете подлинные письма. Что же касается их содержания, то я не смею утверждать, что оно в действительности было придумано Паскалем, но оно вполне возможно, и никакими историческими аргументами этого нельзя опровергнуть» [Реньи, 1970, с. 71]. В этом же уверяет и редактор русского перевода Б. В. Гнеденко: «Реньи удалось удержаться от того, чтобы приписать Паскалю взгляды, которые оторвали бы его от эпохи, перенесли бы его в более поздние времена, он нигде не изменяет исторической достоверности» [Там же, с. 6].

Рассмотрим кратко содержание писем Паскаля к Ферма, которые приводит Реньи. Напомним, что во всех сохранившихся письмах решаются только отдельные задачи, в основном задача о справедливом разделении ставки. Реньи также подчеркивает, говоря о дошедших письмах, что «проблемы теории вероятностей в них не затрагиваются, не упоминается даже само слово „вероятность“» [Там же, с. 74—75].

В первом же письме (от 28 октября) Паскаль оставляет решение конкретных задач и переходит к обсуждению общих вопросов. «Я ликовал, ибо зародился новый раздел математики и, смею надеяться, с большим будущим» [Там же, с. 24]. Как мы видим, в дошедших письмах Паскаль не выделил ни общего предмета исследований, ни общего метода, а следовательно, он не мог говорить о зарождении нового раздела науки (математики). Разделом математики теорию вероятностей стали считать значительно позже.

Далее, в предполагаемом письме Паскаль вводит понятия вероятности: «Степень возможности (уверенности) события я назвал вероятностью... Каждому событию, наступление которого зависит от случая, можно поставить в соответствие определенное

число, заключенное между нулем и единицей, в качестве его вероятности» [Там же, с. 28]. Затем речь идет о том, что вероятность достоверного события равна единице, а невозможного — нулю.

Выделение понятия вероятности из смутных представлений середины XVII в. произойти не могло. Для этого теория вероятностей должна была пройти довольно большой путь своего развития. Нужно было выделить то общее, что имеется у задач, возникающих в самых разнообразных областях науки и деятельности человека. Определить же центральное понятие новой науки на основе решения двух-трех любопытных задач совершенно невозможно, этот вопрос во времена Паскаля не мог встать перед математиками. Еще через 100 лет понятие вероятности будет фигурировать совсем не так отчетливо, как в предполагаемых письмах Паскаля: «Вероятность любого события, относящегося к результату игры, равна частному от деления числа благоприятных для этого события исходов на число всех возможных исходов» [Реньи, 1970, с. 30]. Затем в этом же письме сформулированы теоремы сложения и умножения вероятностей. Хотя Паскаль в скрытой форме и пользовался этими теоремами, но выделить их в «две основные теоремы математики случайного» [Там же, с. 31] он, конечно, не мог.

Для осознания этого должно было произойти накопление обширного материала, которого во времена Паскаля просто еще не было. Это мы теперь в действиях Паскаля видим, что он прибегает к этим теоремам, он сам и не предполагал, что он пользуется новыми важными теоремами математики.

В этом же письме Паскаль рассматривает и геометрическую вероятность (не называя ее так) при решении следующей задачи: «Как велика вероятность того, что, когда я проснусь ночью и посмотрю на часы, большая стрелка будет стоять между 15 и 20 минутами?» [Там же, с. 30]. Задачи аналогичного характера, которые привели к понятию геометрической вероятности, впервые обратили на себя внимание примерно через 100 лет после Паскаля.

Реньи излагает далее мысли Паскаля о том, «что здесь речь идет о новой ветви математики, которую можно назвать математикой случайного... можно также назвать ее *теорией вероятностей*» [Там же, с. 32].

Теория вероятностей стала восприниматься как новая ветвь математики значительно позже, для этого необходимо было выделить вероятностные задачи из многих областей деятельности человека и определить те математические методы, которые применимы для их решения. По этому поводу мы читаем, в частности, у Б. В. Гнеденко: «В конце XVIII века начали формироваться представления о молекулярном строении материи, а также закладываться основы количественной теории ошибок наблюдения. Эти задачи, так же как задачи страхования и демографии, требовали существенно иных представлений, математических идей и методов и положили начало математической статистике и теории

вероятностей. Примечательно, что названные дисциплины в то время не воспринимались как математические» [Гнеденко, 1970, с. 43].

В следующем письме (от 6 ноября) Паскаль уточняет определение вероятности: «Вероятность некоторого события можно определить путем деления числа благоприятствующих событию исходов на число всех возможных, равновозможных и взаимно исключающих исходов» [Реньи, 1970, с. 35]. Заметим, что такого четкого определения вероятности (так называемого классического определения) нет даже у Лапласа. Далее Паскаль рассуждает о том, что в этом определении порочного круга нет, как может показаться с первого взгляда. Затем вводятся понятия относительной частоты и статистической вероятности. Об использовании статистической вероятности Паскаль пишет: «Из наблюдений частоты мы можем делать заключения о значении определенной вероятности, а из полученных таким образом вероятностей вычислять другие, пользуясь правилами вычисления вероятностей» [Там же, с. 42] — это очень близко к определению предмета теории вероятностей П. Л. Чебышевым, но очень далеко от истинного Паскаля.

В третьем письме (от 8 ноября), обсуждая применение теоремы умножения к зависимым событиям, Паскаль вводит понятие условной вероятности. Чтобы было видно, насколько рассуждения Паскаля далеки от взглядов XVII в. и близки нашему времени, мы приведем еще одну цитату: «Может случиться, что вероятность события B при условии, что событие A уже произошло, равна вероятности события B без дополнительного условия. В этом случае вполне обоснованно называть события A и B *независимыми* событиями... Когда события A и B независимы, теорему умножения вероятностей можно сформулировать, не прибегая к понятию условной вероятности» [Там же, с. 46—47]. Четкость таких определений может быть поставлена в пример ряду учебников и XX в.

В четвертом, и последнем, письме (от 19 ноября) Паскаль передает Ферма содержание своей беседы с Митоном. Паскаль касается здесь схемы урн с возвращенным и невозвращенным шаром. Из этого письма следует, что не только Паскаль, но и Митон свободно оперирует понятием вероятности, обсуждает ее свойства. Митон и Паскаль обсуждают вопрос о том, субъективна или объективна вероятность, что понимать под вероятностью одиночных событий, что такое гипотетическая вероятность, и другие подобные вопросы. Весь разговор между ними ведется на уровне значительно более позднего состояния науки, чем середина XVII в.

Изложенные Реньи письма Паскаля не соответствуют истории теории вероятностей. Паскалю приписаны взгляды значительно более позднего времени, иногда чуть ли не XIX в. В период зарождения самых первых основ теории вероятностей вопросы, обсуждаемые Реньи в письмах Паскаля, не могли даже быть поставлены. Для их возникновения теория вероятностей должна

была пройти еще довольно длинный путь. Только после работы Я. Бернулли, о которой у нас будет идти речь дальше, в XVIII в. на повестку дня встали некоторые аналогичные вопросы. Часть же вопросов, обсуждение которых Реньи вкладывает в письма Паскаля, встали перед наукой значительно позже. Во времена же Паскаля не было никаких причин их выдвигать и тем более обсуждать.

Можно высказать сожаление, что столь ярко написанная книга Реньи оказалась исторически несостоятельной.

2. Вероятностные представления у основателей теории вероятностей. Гюйгенс

Х. Гюйгенсу посвящена громадная литература. Библиография основных работ о Гюйгенсе помещена в книге Франкфурта и Френка [Франкфурт, Френк, 1962]. Мы остановимся на тех сторонах деятельности Гюйгенса в теории вероятностей, которые связаны с нашей темой.

В 1655 г. Х. Гюйгенс (1629—1695) приезжал в Париж, где познакомился со многими видными учеными. На него произвел глубокое впачатление рассказ Милона и Роберваля о новых вопросах, разрабатываемых Паскалем и Ферма; ему сообщили и о задаче о справедливом разделении ставки. Не установив, как решались подобные задачи, Гюйгенс после возвращения в Голландию в конце 1655 г. самостоятельно занялся их исследованием. Результатом этого исследования явилась работа «О расчете в азартных играх», помещенная в виде приложения на латинском языке («De ratiociniis in ludo aleae») к книге «Математические этюды» Франца ван Схоутена, вышедшей в 1657 г.[1] Следует отметить, что эта работа Гюйгенса была первой печатной работой, посвященной теории вероятностей.

Хотя работа Гюйгенса и была опубликована после переписки Паскаля и Ферма, но эта переписка не могла оказать влияния на книгу Гюйгенса, так как письма Паскаля и Ферма были изданы лишь в 1679 г. К этой работе Гюйгенс вместо предисловия поместил свое письмо к Схоутену от 27 апреля 1657 г. В этом же письме Гюйгенс объясняет историю написания книги.

«Затем нужно знать, что в течение известного времени некоторые из наиболее знаменитых математиков всей Франции занимались этого рода расчетами, чтобы никто не приписывал чести первого открытия, которая мне не принадлежит. Но эти ученые, подвергнув друг друга испытанию, предлагая взаимно к разрешению много трудных задач, свои методы держали в тайне настолько, что я должен был сам рассмотреть и развить весь этот

---

[1] На латинский язык работа Гюйгенса была переведена его учителем Схоутеном. В 1660 г. она была издана на голландском языке — языке оригинала («Van rekeningh in Spelen van Geluck»).

вопрос, начиная с основ, и мне невозможно, по только что упомянутым причинам, утверждать, что мы исходили из одного и того же основного принципа. Но что касается результатов, то я констатировал в большом числе случаев, что мои решения совершенно не отличаются от их решений [Huygens, 1920, с. 58] [1].

Гюйгенс четко здесь пишет, что «знаменитые математики... Франции» (Паскаль и Ферма) скрывали свои методы и он должен был сам рассмотреть и углубить весь этот вопрос. Мы остановились на этом вопросе потому, что в литературе встречается мнение, что книжка Гюйгенса была написана под решающим влиянием содержания переписки Паскаля и Ферма. Приведем один пример: «В 1658 году появилась книга Христиана Гюйгенса (1629—1695) „О расчетах в азартных играх" („De ratiociniis in ludo aleae"), в которой давалось подробное изложение вопросов, рассмотренных Ферма и Паскалем (автор явно опирался на переписку этих двух ученых)» [Реньи, 1970, с. 79]. Делаются далеко идущие выводы о том, что на Я. Бернулли, Монмора, Муавра оказали влияние книга Гюйгенса, а тем самым переписка Паскаля и Ферма.

Переписка Паскаля и Ферма оказала влияние на Гюйгенса только тем, что, узнав о ее существовании (не зная ее содержания) [2], Гюйгенс вначале самостоятельно занялся решением тех же задач. В дальнейшем в своей книге Гюйгенс далеко вышел за пределы задач, решаемых Паскалем и Ферма.

В предисловии к книжке (письмо к Схоутену) Гюйгенс пишет: «Чем более трудной является задача определения при помощи рассуждений того, что кажется неопределенным и подчинено случаю, тем более наука, которая достигает результата, представляется удивительной». И далее: «Во всяком случае, я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории» [Huygens, 1920, с. 58]. В этом высказывании Гюйгенс показал глубокое понимание существа рассматриваемых вопросов. Он увидел, и частично выделил, новые понятия и методы, а также новый, необычный тип задач, которые характеризуют закладывание основ «очень интересной и глубокой теории».

Книга Гюйгенса выдержала еще в XVII в. ряд изданий и оказала влияние на многих ученых. В частности, получил распространение английский перевод (1692).

Вся книга состоит из небольшого введения и 14 предложений. Во введении Гюйгенс пишет: «Хотя в играх, основанных на чистом

---

[1] В XIV томе 22-томного собрания сочинений Гюйгенса, на который мы ссылаемся, приведен голландский оригинал и его французский перевод; это собрание сочинений издавалось с 1888 по 1950 г.

[2] Какие задачи решались в письмах, было хорошо известно, и сами задачи были знакомы многим; неизвестен был метод их решения — в этом состояло содержание писем.

случае, результаты являются неизвестными, однако шанс игрока на выигрыш или на проигрыш имеет определенную стоимость. Например, если кто-нибудь держит пари» что он выбросит при первом бросании одной кости шесть очков, то неизвестно, выиграет ли он или проиграет, но что является определенным и поддающимся исчислению, это то, насколько его шансы проиграть пари превосходят его шансы на выигрыш пари» [Там же, с. 60].

Уже в этом высказывании Гюйгенс выделяет понятие «шанс», которое, по существу, есть еще не очень осознанное понятие вероятности.

После нескольких общих замечаний Гюйгенс переходит к рассмотрению 14 предложений.

1-е предложение. «Если я имею равные шансы получения a или b, то это мне стоит $(a+b)/2$» [Там же, с. 62].

Гюйгенс не принимает это предложение за аксиому, а доказывает его следующим рассуждением.

Пусть стоимость моего шанса будет x. «Нужно, чтобы, владея x, я мог получить снова тот же самый шанс при помощи справедливой игры» [Там же]. Пусть ставки обоих игроков будут по x. Выигравший дает проигравшему a. Следовательно, имеется одинаковый шанс получить a и $2x-a=b$, откуда мой шанс будет равен $x=(a+b)/2$. «Владея $(a+b)/2$, я могу рискнуть этой суммой против другого игрока, который поставит также $(a+b)/2$, и условиться с ним, что выигравший дает a другому. Я, таким образом, буду иметь одинаковый шанс получить a, если я проиграю, или b, если я выиграю» [Там же].

Это, конечно, не доказательство, а некоторые пояснения первого предложения. Следует отметить, что здесь среднее значение уже начинает принимать вид математического ожидания.

2-е предложение. «Если я имею равные шансы на получение a, b или c, то это мне стоит столько же, как если бы я имел $(a+b+c)/3$» [Там же, с. 64]. Это предложение Гюйгенс сопровождает рассуждением, которое аналогично рассуждению относительно первого предложения.

3-е предложение. «Если число случаев, в которых получается сумма a, равно p, и число случаев, в которых получается сумма b, равно q, и все случаи одинаково легко могут произойти, то стоимость моего ожидания равна $(pa+qb)/(p+q)$» [Там же, с. 66]. Это предложение Гюйгенс доказывает следующим образом.

Пусть x — стоимость моего шанса, а количество всех игроков пусть будет $p+q$, причем ставка каждого игрока также x. С каждым из q игроков я договариваюсь, что в случае его выигрыша он дает мне b, а в случае же моего выигрыша я даю ему эту сумму. С каждым из $p-1$ остальных игроков я договариваюсь, что в случае выигрыша он дает мне a, а в случае моего выигрыша я даю ему эту сумму. После такого договора я имею q шансов на получение b, $p-1$ шанс на получение a и один шанс на получе-

ние $px + qx - qb - (p - 1)a$. Если $px + qx - qb - (p - 1)a = a$, то я имею p шансов получить a (и q шансов получить b), а именно о них идет речь в самом предложении. Из уравнения $px + qx - qb - (p - 1)a = a$ находим

$$x = \frac{pa + qb}{p + q}.$$

В этом предложении фактически определяется математическое ожидание для дискретных случайных величин. Предложением четвертым начинается разбор задач о разделении ставки.

«Предположим, что я играю против другого лица на то, кто первым выиграет 3 партии, и что я уже выиграл 2 партии, а он 1. Я хочу знать, какая часть ставки причитается мне в случае, когда мы хотим прервать игру и справедливо разделить ставки.

...Нужно заметить сначала, что достаточно принять во внимание число партий, недостающих той и другой стороне. Так как верно, что если бы мы играли на то, кто первым выиграет 20 партий, и если бы я выиграл 19 партий, а мой противник 18, то я имел бы такое самое преимущество, как и в изложенном случае, где при 3 партиях я выиграл 2, а он только 1, и это потому, что в обоих случаях мне недостает только одной партии, а ему двух. Затем, чтобы вычислить часть, причитающуюся каждому из нас, нужно обратить внимание на то, что произошло бы, если бы мы продолжали игру. Верно, что если бы я выиграл первую партию, то я закончил бы игру и таким образом получил бы полностью сумму ставки, которую я обозначу a. Но если первую партию выигрывает мой противник, то наши шансы отныне станут равными, принимая во внимание, что каждому из нас будет недоставать по одной партии; значит, каждый из нас имел бы право на $^1/_2\, a$. Очевидно, что я имею столько же шансов выиграть первую партию, как и проиграть ее. Значит, я имею равные шансы получить a и $^1/_2\, a$, что, согласно первому предложению, эквивалентно сумме половин, т. е. $^3/_4\, a$, так что моему противнику остается $^1/_4\, a$» [Там же, с. 68].

Мы привели почти полностью четвертое предложение, так как принцип решения других задач на разделение ставки такой же.

По существу, здесь изложен принцип решения задачи, такой же как и у Паскаля в его письме к Ферма. Но Гюйгенс пошел несколько дальше; он рассматривает не конкретную сумму, а сумму a; он четко формулирует, что необходимо принимать во внимание только количество недостающих партий, а главное, он решение задачи на разделение ставки вводит в определенную систему с применением математического ожидания (ссылка на предложение первое) и понятия вероятности в виде шансов, которая в первую очередь выступает как равновероятность (шансы равны).

В предложениях 5—9 подробно решаются различные задачи на разделение ставки, причем в девятом предложении уже между тремя игроками,

Число недостающих партий	1.1.2	1.2.2	1.1.3	1.2.3	1.1.4	1.1.5	1.2.4
Части ставки, причитающиеся игрокам	4.4.1 9	17.5.5 27	13.13.1 27	19.7.1 27	40.40.1 81	121.121.1 243	178.58.7 243
Число недостающих партий	1.2.5	1.3.3	1.3.4	13..5	2.2.3	2.2.4	
Части ставки, причитающиеся игрокам	542.179.8 729	65.8.8 81	616.82.31 729	629.87.13 729	34.34.13 81	338.338.53 729	
Число недостающих партий	2.2.5	2.2.3	2.3.4	2.3.5			
Части ставки, причитающиеся игрокам	353.353.231 729	33.55.55 243	451.195.83 729	1433.635.119 2187			

После решения этих задач Гюйгенс в девятом предложении дает следующее правило.

«Чтобы вычислить часть ставки, причитающейся каждому игроку при каком угодно их числе и условии, что каждому из них недостает определенного числа партий, нужно сначала принять во внимание, что будет причитаться интересующему нас игроку, если он сам или кто-либо другой из игроков выиграет очередную партию. Эти части нужно сложить вместе и полученную сумму разделить на число игроков, что укажет искомую часть... Следует вначале исследовать наиболее простые случаи и потом с их помощью рассматривать следующие. Согласно этому способу можно вычислить все случаи, которые приведены в таблице, и бесконечное число других случаев» [Там же, с. 74].

Далее следует упомянутая таблица (см. с. 59)

Верхняя строка этой таблицы указывает, сколько партий недостает для выигрыша всей ставки каждому из трех партнеров. Например, 1.1.2 означает, что первому партнеру недостает одной партии, второму — одной, третьему — двух. Вся таблица составлена для трех партнеров. Нижняя строка дает ответы в долях ставки. Например, запись $\frac{4.4.1}{9}$ означает, что каждый из партнеров должен получить соответственно $^4/_9$, $^4/_9$ и $^1/_9$ ставки.

Гюйгенс правильно решил задачу о справедливом разделении ставки. Он исходил из положения, что ставку нужно делить пропорционально вероятностям выигрыша всей ставки при продолжении игры.

Затем Гюйгенс пишет, что все приведенные предложения можно применить при решении задач, связанных с бросанием костей. Он замечает, что одной костью можно получить шесть различных исходов. Двумя — $6 \cdot 6 = 36$, тремя $36 \cdot 6 = 216$; четырьмя — $216 \cdot 6 = 1296$. «Так можно продолжать вычисление числа случаев для какого угодно числа костей, умножая на 6 число предшествующих случаев при прибавлении следующей кости» [Там же, с. 78]. Гюйгенс указывает, сколькими способами при бросании двух костей можно получить ту или иную сумму очков. Для трех костей он составляет следующую таблицу:

При трех костях находим для	3 или 18		1		
	4 » 17		3		
	5 » 16	очков	6	различных случаев.
	6 » 15		10		
	7 » 14		15		
	8 » 13		21		
	9 » 12		25		
	10 » 11		27		

10-е предложение. «Определить, при скольких бросаниях можно обязаться выбросить одной костью шесть очков» [Huygens, 1920, с. 78].

Гюйгенс эту задачу решает следующим образом. При одном бросании имеется 1 шанс получить 6 очков и 5 шансов не получить. Если разыгрывается сумма a, то шанс получить эту сумму будет стоить

$$\frac{1\ a+5\cdot 0}{6}=\frac{1}{6}\ a.$$

«Тому, кто предложил ему бросить кости, остается $\frac{5}{6}a$. Значит, тот, кто играет партию в одно бросание, может ставить только 1 против 5» [Там же]. При двух бросаниях кости расчет ведется так. «Если 6 очков получается при первом бросании, то бросающий получает a, но на это у него имеется 1 шанс, и имеется 5 шансов, что это не произойдет. Но тогда имеется еще второе бросание, которое, согласно предшествующему вычислению, стоит ему $\frac{1}{6}\ a$» [Там же]. Следовательно, бросающий имеет 1 шанс получить a и 5 шансов получить $\frac{1}{6}a$, что стоит $\dfrac{1a+\frac{5}{6}}{6}=\frac{11}{36}a.$

Аналогично для трех костей Гюйгенс получает $\frac{91}{216}\ a$, для четырех $\frac{671}{1296}\ a$, для пяти $\frac{4651}{7776}\ a$, для шести $\frac{31031}{46656}\ a$ и заключает: «Можно последовательно продолжить это вычисление для какого угодно числа бросаний» [Там же, с. 80].

Полученные Гюйгенсом выражения являются математическими ожиданиями выигрыша при одном, двух, ..., шести бросаниях кости. Дроби, стоящие перед a: $\frac{1}{6}$, $\frac{11}{36}$, . . . , являются соответствующими вероятностями.

11-е предложение. «Найти, в сколько бросаний двумя костями можно обязаться выбросить две шестерки» [Там же].

Эту задачу Гюйгенс решает аналогично предыдущей и находит, что если разыгрывается сумма a, то шанс при одном бросании стоит $\frac{1}{36}\ a$, при двух $\frac{71}{1296}\ a$, а при четырех — $\frac{178991}{1679616}\ a$ и т. д.

«Я нахожу, что тот, кто играет при 24 бросаниях, имеет еще легкую невыгоду и что можно принимать с выгодой партию, только играя минимально при 25 бросаниях» [Там же, с. 82].

12-е предложение. «Найти число костей, при котором можно обязаться выбросить две шестерки при первом бросании.

Это равносильно желанию узнать, в сколько бросаний одной кости можно выбросить две шестерки» [Там же].

Решая эту задачу такими же приемами, как и предыдущие, Гюйгенс приходит к верному выводу: «Можно с выгодой согласиться выбросить шесть очков два раза при 10 бросаниях одной кости или при одном бросании 10 костей» [Там же, с. 84].

Для полноты приведем еще задачи, которые сформулированы в 13-м и 14-м предложениях. Гюйгенс решает их, умело высчиты-

вая соответствующие математические ожидания, или, как он говорит, «цену шанса».

13-е предложение. «Найти причитающуюся каждому из нас часть общей суммы ставок при предположении, что я бросил две кости один раз с тем условием, что если выпадет 7 очков, то выигрываю я, и что выигрывает мой противник, если выпадает 10 очков, а если выпадает другое число очков, то мы делим общую сумму поровну» [Там же].

14-е предложение. «Другой игрок и я поочередно бросаем две кости при условии, что я выигрываю, как только я выброшу 7 очков, и он выигрывает, как только выбросит 6 очков, и я предоставляю ему бросить первому, требуется найти отношение моих шансов и его» [Там же, с. 86].

Эта книжка Гюйгенса до появления работы Я. Бернулли была, по существу, единственным руководством по теории вероятностей. Она имела широкое распространение и оказала существенное влияние на многих, кто занимался вопросами теории вероятностей.

Гюйгенс фактически впервые вводит понятие математического ожидания и использует его. Математическое ожидание является обобщением понятия среднего арифметического. Среднее арифметическое до своего проникновения в науку широко применялось в торговле и промышленности для определения средних цен, средней прибыли и т. п.

Гюйгенс считает, что математическое ожидание — это цена шанса на выигрыш в безобидной игре, и приходит к выводу, что справедливая цена есть средняя цена. Для Гюйгенса математическое ожидание — это еще не математическая асбтракция, а определенная денежная сумма — средняя цена шанса на выигрыш. Сам Гюйгенс не называет математическое ожидание ожиданием, оно у него фигурирует как стоимость шанса. Впервые термин «ожидание» появляется в переводе ван Схоутена.

В конце книги Гюйгенс предлагает пять задач для читателей. Решения этих задач он опубликовал только через 8 лет, в 1665 г., без объяснений, только с математическими выкладками.

Вот эти задачи.

1. A и B играют двумя костями на следующих условиях. A выигрывает, если он выбросит 6 очков, B выигрывает, если выбросит 7 очков. Первым бросает один раз A, затем B бросает дважды, затем A бросает два раза и т. д., пока кто-нибудь не выиграет. В каком отношении шансы A относятся к шансам B? Ответ: как 10355 к 12276.

2. Трое игроков A, B и C берут 12 фишек, из которых 4 белых и 8 черных, и играют на таких условиях: первый вытянувший вслепую белую фишку побеждает. A тянет первым, B — вторым и потом C, затем опять A и т. д. Вопрос: в каком отношении находятся шансы одного против других?

3. A держит пари против B, что из 40 карт (по 10 одинаковой масти) он выберет 4 такие, что каждая будет различной масти. Здесь величина шансов A против B определяется как 1000 к 8139.

4. Имеем, как во второй задаче, 12 фишек, из которых 4 белых, 8 черных. A держит пари против B, что в выборе 7 фишек вслепую он будет иметь 3 белых. Спрашивается, в каком отношении стоят шансы A против B?

5. A и B, каждый имеющий по 12 монет, играют тремя костями на условиях: если A выбросит 11 очков, он должен дать B одну монету, но если он выбросит 14, тогда B должен дать одну монету A. Тот игрок выигрывает, который первым получит все монеты. Здесь шансы A относятся к шансам B как 244 140 625 к 282 429 536 481.

Далее Гюйгенс пишет, что он не дает решения этих задач потому, что было бы слишком трудно «надлежаще изложить рассуждения, приводящие к ответам». Кроме того, он считает, что это хорошие упражнения для читателей. После этих слов стоит дата окончания книги: «Гаага, 27 апреля 1657 г.».

Решением этих задач занимались многие математики XVII в.

Итак, Гюйгенс ввел в своей книжке понятие вероятности как величины шанса (точнее сказать, величина шанса пропорциональна вероятности); ввел математическое ожидание для дискретных случаев, в виде цены шанса, и широко применял его при решении задач; пользовался основными свойствами вероятности, выраженными теоремами сложения и умножения вероятностей, не выделяя еще и не формулируя эти теоремы.

Если зарождением новой науки считать выделение ее предмета из других наук и задач, выработку новых понятий, характерных для данной науки, и разработку специфического аппарата для решения новых проблем, то труды Паскаля, Ферма и в первую очередь Гюйгенса дают нам право говорить, что теория вероятностей зародилась как наука в середине XVII в. Центральным понятием этой науки с самого начала стало понятие вероятности, которое в этот период только начало выделяться в самостоятельное понятие.

В XVII в. понятие вероятности стало выделяться не только в математике, на его формирование оказали существенное влияние проблемы оценки наблюдений в естественных науках, прежде всего в астрономии и физике, а также вопросы статистики, в первую очередь демографии.

3. Вероятность у Галилея

В XIV томе сочинений Г. Галилея (1564—1642), изданных во Флоренции, наряду с другими работами помещена его переписка [Galilei, 1855, с. 231—284]. В частности, там имеется его переписка с Назолини и письмо Бенедетто Кастелли. Из этих писем видно, что во Флоренции в то время часто собирались представители вы-

сшего света для различных научных бесед. На одной из таких встреч был предложен следующий вопрос. Действительная цена лошади 100 крон [1]; один человек оценил ее в 10 крон, другой — в 1000. Кто из них сделал более неправильную оценку? Галилей считал, что обе оценки одинаково ошибочны, так как отношения 1000 : 100 и 100 : 10 одно и то же. Священник Назолини считал, что высшая оценка более неправильная, так как разница 1000—100 больше, чем 100—10. Из письма Кастелли следует, что первоначально Галилей придерживался того же мнения, что и Назолини, а затем изменил его. В этих обсуждениях, как мы видим, затрагивались вероятностные оценки.

После изобретения телескопа все шире и шире в астрономическую практику стали входить наблюдения при помощи различных установок и все актуальней становился вопрос об оценке ошибок наблюдений. Одним из первых эту проблему в своих работах поставил Галилей. И хотя он не дал количественного или аналитического решения вопроса, многие высказанные им положения оказали большое влияние как на разработку вопроса об оценке ошибок наблюдения, так и на выработку основных понятий теории вероятностей. Наиболее подробно эти вопросы Галилей излагает в «Диалогах о двух главнейших системах мира», которые впервые были опубликованы в 1632 г.

В беседе третьего дня этой книги обсуждается вопрос о том, где находится новая звезда 1572 г. — ниже Луны, выше Луны или на сфере неподвижных звезд. Кратко история этого вопроса такова. 11 ноября 1572 г. в Дании Тихо Браге (1546—1601) заметил яркую звезду в созведии Кассиопеи. Новая звезда сверкала с такой же яркостью, как Венера, и была видна даже днем. Это удивительное явление взволновало весь мир. Одни считали, что новая звезда принадлежит к подлунному миру переменных земных элементов, другие — что это комета, сконденсированная из горячих паров. Некоторые относили ее к миру звезд. Последнее противоречило мнению о том, что в мире звезд все остается неизменным на вечные времена. Тихо Браге пришел к выводу, что она относится к миру звезд и что, вопреки распространенному мнению, в эфирном мире (в мире звезд) также происходят изменения. Эти выводы он опубликовал в книге «De Nova Stella» (1573).

Вскоре после своего появления блеск новой звезды начал уменьшаться, и в 1574 г. она совсем исчезла [2]. Но споры о ней не прекращались еще долгое время.

Многие объясняли появление новой звезды как результат случайного сочетания атомов. Кеплер же заявил, что если даже такие события, как выпадение определенного числа очков при

[1] Крона — название многих средневековых европейских монет; происходит от изображения на монете короны, во Франции была в обращении с 1340 г. (5,4—3,5 г золота).

[2] По этому вопросу см. подробнее [Паннекук, 1966].

бросании костей, не происходят без причин, то тем более должна быть естественная причина для появлений новой звезды.

В 1628 г. вышла книга Киарамонти «О трех новых звездах, появившихся в годы 1572, 1600, 1604», в которой автор отстаивает мнение, что расстояние до звезды 1572 г. меньше, чем расстояние до Луны. Галилей в своих «Диалогах» вступает по этому вопросу в дискуссию.

Киарамонти и Галилей строили свои выводы исходя из одних и тех же наблюдений, которые были проведены разными лицами. Эти наблюдения состояли в определении меридиональных высот Новой звезды. По каждой паре наблюдений вычислялись ее параллаксы: $\pi = \Delta h_{\text{п}} - \Delta h_{\text{Н}}$, где $\Delta h_{\text{п}}$ — разность высот полюса в пунктах наблюдений, а $\Delta h_{\text{Н}}$ — соответствующая разность высот Новой. По полученным параллаксам определяли расстояние до Новой в долях земного радиуса. Этот способ неточен, даже если наблюдения проводить из противоположных точек земной орбиты. Но Галилею особая точность и не была нужна, так как он определял не расстояние до Новой звезды, а только ее место среди других небесных тел.

Прежде всего Галилей делает замечание о том, что если бы Новая звезда находилась среди неподвижных звезд, то ее высоты, измеренные на разных широтах, отличались бы друг от друга точно на столько же, на сколько в этих точках отличаются друг от друга высоты полюса. Но если Новая звезда находилась бы на близком расстоянии от Земли, то ее высота при переходе к большим широтам росла бы быстрее, чем высота полюса. Из разности прироста этих высот, которую Галилей называет разницей параллакса или просто параллаксом, легко вычислить расстояние от звезды до центра Земли.

Киарамонти из 13 наблюдений Новой звезды разными астрономами составляет по своему усмотрению 12 пар наблюдений. На основании параллаксов в этих парах он вычисляет расстояние до звезды, которое получается равным от $^1/_{48}$ радиуса до 32 радиусов Земли, что меньше, чем расстояние до Луны. Из этого он делает вывод, что истинное расстояние до Новой звезды меньше, чем расстояние до Луны.

Большинство пар наблюдений (а их всего можно составить $C_{13}^2 = 78$) дают расстояния бóльшие, чем расстояния до Луны, но Киарамонти считает, что наблюдения, помещающие звезду так далеко, ошибочны.

Киарамонти, не решаясь признать появление нового светила в вечной и неизменной сфере звезд, произвольным образом исключил неугодные ему наблюдения.

В ходе дискуссий с Киарамонти Галилей приходит к ряду важных принципиальных положений. Он отмечает, что все 12 пар наблюдений, которые учитывает Киарамонти, дают разные расстояния. Это зависит «не от недостатков правил вычислений, но от ошибок, сделанных при определении углов и расстояний»

[Галилей, 1948, с. 212]. Далее Галилей пишет, что при наблюдениях всегда происходят ошибки: «В каждой комбинации наблюдений будет какая-нибудь ошибка; я думаю, что это совершенно неизбежно... Даже при определении одной только высоты полюса посредством одного и того же инструмента в одном и том же месте и одним и тем же наблюдателем, которое может быть повторено тысячу раз, всегда получается отклонение» [Там же, с. 214].

Итак, Галилей приходит к выводу, что случайные ошибки при инструментальных наблюдениях неизбежны. Он эту мысль повторяет несколько раз. Затем он ставит вопрос о том, как исправить результат наблюдений, чтобы получить достоверные результаты. Другими словами: как учесть случайные ошибки?

По мнению Галилея, ввиду того, что чаще допускаются ошибки меньшие, чем большие, необходимо и исправления вносить скорее меньшие, чем большие, т. е. он принимает ту систему исправлений, для которой сумма поправок минимальна. Галилей повторяет, что вероятность малых отклонений больше, чем вероятность больших отклонений. В дальнейшем этот вопрос обсуждался многими математиками.

Далее Галилей считает, что необходимо отбросить все наблюдения, которые дают невозможные результаты, т. е. отбросить те наблюдения, которые дают результаты, далеко отстоящие от большинства других результатов (наблюдения с очень малой вероятностью).

Затем, обсуждая вопрос о том, какого знака могут встречаться ошибки, Галилей приходит к выводу, что «можно одинаково легко ошибаться как тем, так и другим образом» [Там же, с. 215], т. е. вероятности этих ошибок одинаковы. Галилей имеет в виду, хотя это и не совсем отчетливо высказано, что закон распределения ошибок симметричен.

После этого Галилей говорит об ошибочном мнении, которое широко распространено. Считают, что по величине ошибки, которые обнаруживаются после получения результата наблюдения и соответствующих выкладок, можно судить об ошибках инструмента, на котором производятся наблюдения, и, наоборот, по ошибкам инструментов можно судить о величине окончательных погрешностей. Опровергая это мнение, Галилей приходит к выводу, что «величину ошибок, так сказать, инструментальных следует оценивать не по результату вычисления, но по количеству тех градусов и минут, которые отсчитываются на инструменте» [Там же, с. 216].

Галилей говорит о том, что вокруг истинного результата должно группироваться наибольшее число результатов измерений.

Заканчивая обсуждение вопроса о расстоянии до Новой звезды, Галилей пишет: «Совершенно очевидно, что значительно меньшие поправки требуется внести в наблюдения, дающие для звезды бесконечную высоту, для помещения звезды на небесном

своде, чем в подлунной области. Таким образом, все эти изыскания говорят в пользу мнения тех, кто помещает звезду среди неподвижных звезд» [Там же, с. 227].

Справедливость этого вывода следует из того, что большинство наблюдений относят звезду на бесконечную высоту, и для отнесения ее на небесный свод необходимо делать значительно меньшие исправления, чем для отнесения ее на другую высоту, а меньшие ошибки, требующие меньших исправлений, более вероятны, чем бóльшие ошибки.

Окончательный вывод Галилея совершенно справедлив: «Вы можете понять... насколько более вероятным представляется, что звезда находилась на расстоянии самых далеких неподвижных звезд» [Там же].

Галилей в своих астрономических выводах довольно свободно оперирует вероятностными рассуждениями. Он использует и понятие вероятности, не определяя его и не придавая ему количественного значения, хотя некоторые сравнения он и вводит: более вероятные ошибки, менее вероятные и т. п.

Он пришел к целому ряду глубоких выводов относительно свойств случайных ошибок. Галилей считал, что ошибки при измерениях неизбежны, закон распределения случайных ошибок симметричен, вероятность ошибки увеличивается с уменьшением ошибки, около истинного результата скапливается наибольшее количество результатов наблюдения, ошибку, полученную при наблюдениях, никоим образом нельзя сравнивать с окончательными ошибками, которые возникают после расчета с использованием результатов наблюдений. В этих выводах Галилей вскрыл целый ряд характерных особенностей нормального закона распределения вероятностей — в дальнейшем одного из центральных законов теории вероятностей.

Кроме отдельных мест в «Диалогах» у Галилея имеется работа, которая посвящена «вероятностной» тематике того времени. Он дал наиболее полное решение задачи о числе всех возможных исходов при бросании трех игральных костей в своей работе «О выходе очков при игре в кости» [Galilei, 1855]. Время написания этой книги неизвестно. Впервые она была опубликована в 1718 г. Рассмотрев подробно различные исходы при бросании трех костей, Галилей приходит к выводу: «1. Тройка, или, другими словами,— числа, получающиеся при выходе трех костей с тремя одинаковыми очками, не могут получиться иначе как при одном бросании. 2. Тройки, образующиеся из двух одинаковых и третьего отличного от них, могут получиться тремя способами. 3. Те же, которые получаются из трех различных очков, могут получаться шестью способами. Из этих положений мы легко выводим, какими способами, или, лучше сказать, при каких выходах трех костей могут получаться все числа» [Там же, с. 295]. Работа заканчивается таблицей, в которой указаны все возможные суммы, получающиеся при бросании трех игральных костей,

из каких слагаемых и сколькими способами эти суммы можно составить. Галилей считает, что в этой работе он указал «путь к точнейшему изложению оснований, которые позволяют осветить все особенности игры» в кости [Там же, с. 293].

Задача, имеющая многовековую историю, Галилеем решена с исчерпывающей полнотой.

Галилей и в этой работе при различных подсчетах фактически пользуется вероятностью, но нигде не выделяет ее и не определяет.

Отметим одно явление, которое часто будет наблюдаться в развитии теории вероятностей и применении понятия вероятности. Галилей вероятностные представления использовал в двух аспектах: в своей естественнонаучной работе («Диалоги») и в чисто математической («О выходе очков»). Он с двух сторон подходит к одному и тому же понятию вероятности, не осознавая этого. У Галилея это произошло оттого, что ни сама наука теория вероятностей, ни ее основные понятия, и в первую очередь понятие вероятности, не были еще выделены. Только с современной точки зрения мы можем отметить, что Галилей в своих разных работах подходил к одному и тому же понятию вероятности. Во времена Галилея этого увидеть было еще нельзя.

4. Роль статистики в образовании первых вероятностных понятий

Статистическая практика, а затем и теория статистики играли существенную роль в зарождении и развитии теории вероятностей, в выработке ее основных понятий.

Статистические данные чаще всего очень примитивными способами собирались еще в древности. Эти данные в основном касались количества населения.

Геродот пишет, что «однажды царь их [скифов], по имени Арианта, пожелал определить численность скифов и приказал, чтобы все скифы доставили ему по одному наконечнику от стрелы, кто не доставит, будет казнен смертью. Наконечников стрел было очень много, и царь решил соорудить из них памятник ... Вот что рассказывали мне о численности скифов» [Геродот, 1888, с. 341]. Геродот говорит и о другом случае, когда персидский царь Дарий в одном из своих походов «указал войску определенную местность и отдал приказание, чтобы каждый воин, проходя мимо этой местности, положил по одному камню. Войско исполнило это приказание, благодаря чему Дарий, уходя дальше с войском, оставил за собою огромные кучи камней» [Там же, с. 345].

Различные правители Древнего Египта, Греции и Рима делали отдельные попытки подсчета количества населения, количества ежегодно собираемого хлеба, податей и т. п.

В Древнем Риме со времен правления императора Августа (27 г. до н. э. — 14 г. н. э.) присоединение новой области сопровождалось переписью ее населения. В кодексе Юстиниана (528) имеется закон о продовольствии, из которого видно, что уже римляне стремились определить среднюю продолжительность жизни человека при условии достижения определенного возраста.

Норманский герцог Вильгельм I Завоеватель (1027—1087), покорив в 1066 г. Англию, повелел составить особые списки, получившие название «Книга страшного суда». Эти списки содержали результаты всеобщей поземельной переписи в Англии в 1086 г.

В русских летописях, относящихся к IX в. и более поздних, имеются указания на сбор некоторых статистических данных в первую очередь в связи с собиранием дани. Так, в записи относящейся к 859 г., мы читаем, что хозары получали дань с полян, северян и вятичей «по беле и веверице тако от дыма» [Летопись..., 1871, с. 11].

После захвата территорий Руси монголы начали производить переписи населения для сбора дани и податей. После убийства князем Михаилом послов Батыя многие жители Киева разбежались, а оставшихся монголы переписали в 1245 г.

В «Софийском временнике» под 1255 г. записано: «Тое же зимы приехаша численцы из татар и сочтоша всю землю руськую, и поставита десятники и сотники, тысячники; только не чтома. игуменов, попов, чернецов, и кто служит святым церквам» (с. 261).

В связи с эпидемиями чумы в Англии начиная с 1517 г. велись бюллетени о естественном движении населения. Форма и содержание этих бюллетеней изменялись, постепенно совершенствуясь.

В 1532 и 1535 гг. еженедельные бюллетени давали сведения об общем числе похорон и числе похорон лиц, умерших от чумы, по приходам. Ежегодно начиная с 1603 г. в декабре давалась годичная сводка. Одним из ранних и очень важных добавлений было указание причин смерти. Вначале указывались две причины — болезнь и случайность, затем число отмечаемых причин значительно возросло. С 1629 г. стали указывать также и пол умерших, и крещеных (см.[Птуха, 1945]).

Несмотря на то что количество подобных примеров можно значительно увеличить, все они носят разрозненный характер и до XVII в. не складываются в определенную систему. Но их значение нельзя преуменьшать; только благодаря таким применениям статистических методов начиная с древности был подготовлен тот материал, на основе которого возникла статистика, сыгравшая важную роль в выработке понятия вероятности и других вероятностных понятий.

Статистика как особая наука зародилась в Англии в XVII в., когда она приняла вид так называемой политической арифметики. В противоположность чисто описательному государствоведению

немецких статистиков политическая арифметика обратилась к количественному, числовому методу исследования. Возникновение политической арифметики было подготовлено всем ходом предшествующего развития как общественных, так и естественных наук. Основными ее проблемами были вопросы рождаемости, смертности, а также расчеты для страхования жизни и т. д.

Первыми политическими арифметиками были У. Петти (1623—1687) и Д. Граунт (1620—1674). К. Маркс высоко оценивал деятельность У. Петти, считая его основателем политической экономии. К. Маркс писал: «Под классической политической экономией я понимаю всю политическую экономию, начиная с У. Петти» [Маркс, Энгельс, т. 23, с. 91]. И в другом месте: «Уильям Петти, отец политической экономии и в некотором роде изобретатель статистики» [Там же, с. 282]. Маркс называл Петти одним из гениальнейших и оригинальнейших экономических исследователей.

Останавливаясь на методе Петти, К. Маркс пишет следующее: «Петти чувствует себя основателем новой науки. Его метод, как он говорит, „не традиционный“». Вместо набора целого ряда слов в сравнительной и превосходной степени и спекулятивных аргументов, он решил говорить посредством terms of number, weight or measure [чисел, весов и мер], пользоваться исключительно аргументами, взятыми из чувственного опыта, и рассматривать только такие причины, as have visible foundation in nature [которые имеют видимое основание в природе]. Он предоставляет другим исследование причин, зависящих от mutable minds, opinions, appetites and passions of particular men [изменчивости умственных способностей, мнений, желаний и страстей отдельных людей]» [Там же, т. 13, с. 39]. Маркс здесь подчеркивает, что политические арифметики стали заниматься числовыми данными и их анализировать. Этого требовало развитие промышленности и торговли, необходимость оценки экономического положения своей страны и соседей и другие потребности развивающихся буржуазных государств.

Значительное место в исследованиях Граунта и Петти занимала статистика населения. Основная книга Граунта называлась «Естественные и политические наблюдения, сделанные над бюллетенями смертности» [Graunt, 1662]. Довольно свободно используя средние величины, Граунт в ней пришел к различным числовым отношениям, относящимся к населению. Он, например, установил, что перевес рождений мальчиков над рождениями девочек составляет для Лондона 14/13, что в среднем на один брак приходится 4 ребенка; что смертность в первые годы жизни выше, чем в последующие; что смертность в Лондоне выше, чем в провинции, и т. п. Он установил также, что на каждые 11 семейств ежегодно умирает 3 человека. Используя эти и другие данные, он устанавливает численность населения Лондона.

Во времена Граунта количество населения Лондона было совершенно неизвестно и определялось от нескольких сот тысяч до

6—7 миллионов. Никаких проверенных данных не было. Граунт поставил перед собой задачу определить население Лондона. Он рассуждал следующим образом.

По бюллетеням было известно, что число ежегодных рождений составляет 12 000. Граунт полагает, что способных к деторождению замужних женщин вдвое больше — 24 000, ссылаясь при этом на Петти, который пишет, что «замужние женщины имеют в среднем не более одного ребенка за два года» [Petty, 1905, с. 425]. Общее число семейств, по Граунту, вдвое больше этого числа (т. е. 48 000), так как он считает, что женщин в возрасте 16—76 лет вдвое больше, чем женщин в возрасте 20—44 лет. Каждое семейство состоит из 8 человек: отец, мать, трое детей и три человека прислуги или родственников. Следовательно, численность населения Лондона равна $48\,000 \cdot 8 = 384\,000$.

Граунт получает это число и другим путем. Наблюдения в некоторых городских приходах показали, что на каждые 11 семейств ежегодно умирало 3 человека. Общее число смертей в год известно— 13 000. Отсюда получается, что общее число семейств равно $\frac{13000 \cdot 11}{3} = 47666$, что не сильно отличается от 48 000, и, следовательно, население равно около 384 000.

Граунт производит третий подсчет. Изучая карту Лондона, он пришел к выводу, что внутри городских стен проживает 11 800 семейств; в этой черте умирает ежегодно 3200 человек, а общее число умерших 13 000. Отсюда легко подсчитать, что население Лондона равно примерно 384 000 человек.

Граунт при этих подсчетах пользовался и средними значениями, и в какой-то мере вероятностями, он подходил и к пониманию закона больших чисел.

Основная книга Петти «Наблюдения над Дублинскими записями смертности» была издана в Лондоне в 1683 г. Второе, дополненное, издание вышло в 1686 г. («Дальнейшие наблюдения над Дублинскими записями»).

Петти, как и Граунт, свободно использует средние числа в своих исследованиях. Петти устанавливает, что в Лондоне умирает ежегодно 1 человек из 30, в сельской местности — 1 из 37, в Риме — 1 из 40, а из членов парламента — 1 из 50. Он считает, что доля смертных случаев от чумы в период эпидемий составляет $^1/_5$. Петти широко использует в своих расчетах самые разнообразные средние величины: среднее число человек в семье, среднее число печей на один дом, средний денежный расход на одного человека и т. п. Он устанавливает, используя понятия средних, период удвоения населения Лондона и всей Англии.

У Петти встречаются доли, а также отношения (1 человек из 30 и т. п.), которыми он широко оперирует, они в рассуждениях Петти играют роль вероятностей, хотя он никак не выделяет их как новое особое понятие.

Граунт и Петти понимают значение объемов совокупности для

своих выводов. Например, Граунт отмечает недостаточность бюллетеней только за одну неделю для вывода о численности населения Дублина, он считает, что для этого нужо иметь несколько годовых бюллетеней. Петти для установления ренты с земель требует наблюдений в течение ряда лет, не менее семи, в течение которых наряду с урожайными выпадут и неурожайные годы. Средняя величина урожая за эти годы и даст правильный ответ. Таких примеров можно было бы привести много.

Все эти соображения близки к понятию вероятности и к закону больших чисел. Но ни тем, ни другим Граунт и Петти не владели. Их работы только подводили к этим понятиям, которые были введены в науку последующими исследователями.

Граунт и Петти — выдающиеся статистики, они внесли большой вклад в понимание статистики, в собирание и анализ статистического материала. Кроме того, они внесли свой вклад и в разработку подхода к вероятности, а также и к закону больших чисел [1].

Интересно отметить, что с работами Граунта был знаком Гюйгенс и высоко их ценил. Президент Лондонского королевского общества Р. Морэ (1610—1673) 16.III 1662 г. пишет Гюйгенсу, что он ему высылает несколько книг, в том числе «очень интересный сборник наблюдений над еженедельными записями смертности, который внушил нам сильное желание к размышлениям над вещами, могущими быть весьма полезными» [Huygens, 1895, с. 997]. Хотя автор здесь и не назван, но очевидно, что речь идет о книге Граунта. В письме от 16.V того же года Морэ просит высказать свое мнение о книге Граунта и делает попутно некоторые свои замечания: «Я ожидаю от Вас некоторых размышлений о наблюдениях г. Граунта. Если бы во всех городах Европы вели учет болезням, являющимся причинами смерти, и другим вещам, которые наблюдаются в еженедельных записях смертности, ведущихся в течение многих лет в Лондоне, и если бы они были дополнены другими замечаниями, это было бы делом очень полезным во многих отношениях. Сообщите мне, ведутся ли в Ваших голландских городах подобные наблюдения числа умерших и т. д.» [Там же, с. 1013].

В ответ на эти письма 9.VI 1662 г. Гюйгенс пишет: «Рассуждение Граунта весьма достойно размышления и очень мне нравится. Он рассуждает хорошо и ясно, и я удивляюсь тому, как он сумел вывести все эти заключения из простых наблюдений, которые до него представлялись ни к чему не служащими.

Здесь, в нашей стране, не ведут подобных наблюдений вовсе, хотя они явились бы желательными... дело было бы достаточно легким, в особенности в г. Амстердаме, который весь разделен на кварталы и в каждом имеются префекты, знающие число жителей и все, что там происходит» [Там же, с. 1022].

[1] Работам Граунта и Петти посвящена большая литература. Укажем только [Птуха, 1945; Карапетян, 1964; Аникин, 1979].

Младший брат Христиана, Лодевик Гюйгенс на основании работы Граунта и бюллетеней смертности подсчитал среднюю продолжительность жизни для новорожденного и решал некоторые другие демографические вопросы. По этим проблемам у него возникла переписка со старшим братом Христианом.

Х. Гюйгенс подробно останавливается на расчетах брата, уточняя и поправляя их. На основании таблиц, которые содержатся в письмах Л. Гюйгенса, он решает много задач, которые он считает важными для расчета пожизненных рент. «В какое время из 40 лиц 46 лет умрет 2?» (1 год 3 мес.). «Мужчина 56 лет женится на женщине 16 лет, сколько времени они могут жить вместе, до смерти одного из них? Если мне обещали 100 франков в конце года, который проживут они оба, за сколько было бы справедливо выкупить это обязательство?». «Сколько проживет последний из 2 лиц 16 лет?» (Достигнет возраста 45 лет 2 $^2/_3$ мес.). «В какое время умрет один из двух лиц, имеющих по 16 лет каждый?» и др. [Там же, с. 526—531]. При решении этих задач Х. Гюйгенс пользуется математическим ожиданием, которое он ввел в своей работе «О расчетах в азартной игре». В одном из приложений к своему письму Х. Гюйгенс дает графическое решение вопроса о предстоящей продолжительности жизни в каждом возрасте, по существу, здесь строится кривая смертности и определяется средняя и вероятная продолжительность жизни [Там же, с. 531—532]. Переписка между братьями по затронутым вопросам продолжалась довольно долго.

В 1671 г. к Гюйгенсу обратился с рядом вопросов бургомистр Амстердама И. Гудде (1628—1704) [1], который принимал участие в работе, проводимой Виттом, по исчислению пожизненных рент. В своем ответе от 3.X 1671 г. Гюйгенс одобрил проводимую Виттом работу. В переписке с Гудде Гюйгенс обсуждал и чисто математические вопросы. Так, Гюйгенс в письме к Гудде от 10.V 1665 г. предложил следующую задачу: «Жан имеет два белых жетона и один черный, а Поль один белый и два черных. Каждый по очереди наудачу извлекает один из своих жетонов. Тот, кто извлечет черный жетон, должен увеличить ставку на дукат, а тот, кто извлечет белый жетон, получает всю ставку. Жан начинает первым, когда еще ничего не поставлено. Отыскивается выгода и невыгода Жана при начале игры» [Huygens, 1920, с. 102]. В письме от 5.V 1665 г. Гюйгенс предлагает другую задачу: «A и B поочередно наудачу извлекают один жетон: A из трех жетонов, из которых 2 белых и один черный, а B из неизвестного числа белых и черных жетонов, при условии, что тот, кто извлечет черный жетон, тот ставит один дукат, а кто извлечет белый жетон, тот получает

[1] И. Гудде принимал деятельное участие в политической жизни, он 19 раз был бургомистром Амстердама. Известен как юрист и математик. Основные его математические работы относятся к алгебре и геометрии; он также решал отдельные задачи из области азартных игр. Как математик находился под влиянием Ф. Схоутена (1615—1660) (См. [Haas, 1956]).

всю ставку; A начинает производить извлечения первым. Спрашивается, если желательно, чтобы шансы A и B были одинаковы, каково должно быть соотношение между белыми и черными жетонами в жетонах B?» [Там же, с. 108].

На формирование понятия вероятности, конечно, оказали существенное влияние и наблюдения, проводимые в разных науках, в первую очередь в астрономии и геодезии. Точнее сказать, не сами результаты наблюдений, а осмысление расхождений, при наблюдениях. Ошибки при наблюдениях неизбежны, и это было обнаружено очень давно, поэтому наблюдателей всегда волновали вопросы: как уменьшить влияние этих ошибок; как уменьшить сами ошибки; как учитывать несовпадающие наблюдения и т. п. На все эти вопросы можно ответить, учитывая вероятностные рассуждения. Поэтому практику и теорию наблюдений необходимо учитывать в историческом процессе развития понятия вероятности.

Наблюдения неба широко проводились уже в античном мире. Результаты этих наблюдений изучались; опираясь на них, делали далеко идущие выводы. Так, например, Птолемей, сопоставляя свои наблюдения предварения равноденствий с результатами наблюдений Гиппарха, каждый раз брал только по одному своему наблюдению и по одному наблюдению Гиппарха, не используя совсем другие наблюдения. При этом из уважения к Гиппарху, а не из других, вероятностных, например, соображений, Птолемей выбрал из своих наблюдений те, которые больше соответствуют результатам наблюдений Гиппарха (см. [Plackett, 1958]).

Аналогичные примеры, когда из наблюдений выбираются некоторые с учетом соображений совсем не вероятностного характера, встречаются в истории науки довольно часто. Так, например, Нидем [Needham, 1962, с. 42] говорит о том, что в 723—726 гг. н. э. в Китае И-Синь и Е-Нань-Кун проводили градусные измерения и измерения расстояний, цель которых состояла в установлении размера единицы длины — ли в зависимости от размеров Земли, которую они считали шарообразной. Часть измерений была ими отброшена и заменена данными, вычисленными по другим измерениям. Это было ими сделано из соображений «элегантности».

Для компенсации неточности измерений среднее арифметическое употреблялось очень давно. В одном индийском математическом трактате при подсчете объемов земляных работ длину, ширину и глубину рва рекомендовалось измерять в нескольких местах с последующим подсчетом средних арифметических и вычислением объема прямоугольного параллелепипеда при помощи этих средних. Для исключения систематических ошибок стал использовать среднее арифметическое Тихо Браге. При своих измерениях Галилей использовал все измерения. Но еще Флемстид среднее арифметическое употреблял только эпизодически и не верил, что оно точнее отдельных измерений. Д. Бернулли же утверждал,

что среднее арифметическое является общепринятым в практике вычислений. Однако и в XVIII в. принцип среднего арифметического иногда подвергался нападкам даже со стороны крупных ученых. Эйлер считал, что наблюдения, очень далекие «от истины», необходимо отбрасывать, так как они имеют маленькую «надежность», т. е. ввиду их малых вероятностей.

Ламберт изучал случайные ошибки, которые получаются при переносе циркулем длины заданного отрезка. Он сделал 80 переносов. При этом он отмечал, что среднее арифметическое будет ближе всего к истинной величине. Несмотря на примитивность опыта, интересен сам факт проверки свойств случайных ошибок. Итак, только в XVIII в. отошли от произвольного отбора измерений и перешли к средней арифметической. Хотя в связи с улучшением техники измерений имели место высказывания о ненужности среднего арифметического и замены его одним хорошим измерением, принцип среднего арифметического прочно утвердился в научной практике.

Кеплер указывал лишь на ограниченность ошибок наблюдений. Он писал о Тихо Браге: «Благость Божья дала нам в лице Тихо столь точного наблюдателя, что ошибка в восемь минут невозможна, поблагодарим Бога и воспользуемся этой выгодой. Эти восемь минут, которыми пренебречь нельзя, дадут средство преобразовать всю астрономию» (Цит. по: [Предтеченский, 1891]).

Лейбниц полагал, что определение вероятности и принцип среднего арифметического основаны на аксиоме — равно принимать во внимание равноценные предложения.

Симпсон дал вероятностное обоснование преимущества среднего арифметического перед отдельными наблюдениями и тем самым обосновал широкое применение среднего арифметического. Независимо от него это сделал и Лагранж.

Р. Коутс (1682—1716) предложил придавать различным наблюдениям, по которым вычисляются средние значения, различные веса.

Во второй половине XVIII в. появились оценки, которые улучшали среднее арифметическое, придавая средней группе наблюдений больший вес по сравнению с крайними наблюдениями.

Таким образом, в XVII в. уже правильно решались довольно разнообразные задачи, относящиеся к теории вероятностей. Само понятие вероятности стало приобретать все более осязаемое содержание. Были известны теоремы сложения и умножения вероятностей, которые широко применялись при решении задач. Эти теоремы являлись основными характеристиками вероятности. В науку было введено под названием «справедливая цена шанса» одно из важных понятий теории вероятностей — математическое ожидание. Теория вероятностей в этот период была тесно связана с комбинаторикой как основным своим аппаратом. Теория вероятностей начала применяться в статистике, физике, астрономии.

Теория вероятностей как математическая дисциплина в этот период только создавалась, решались отдельные задачи, но они уже были объединены общей вероятностной проблематикой. Их цементировало понятие вероятности. В этот период интерес к новой науке все время возрастал, возрастал интерес и к вероятности.

Наибольшую роль во всем этом процессе сыграли Паскаль и Ферма и в особенности Гюйгенс, который написал первую книгу по теории вероятностей. Книга Гюйгенса оказала большое влияние на многих ученых, в том числе на Монмора и Муавра. Я. Бернулли, положивший начало новому периоду в развитии теории вероятностей, высоко оценивал работу Гюйгенса и отдавал должное его влиянию.

Глава 3

ТРАКТОВКА ВЕРОЯТНОСТИ В XVIII В. И В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XIX В.

В 1713 г. вышла в свет книга Я. Бернулли (1654—1705) «Искусство предположений» [Bernoulli J., 1713], которая сыграла существенную роль в истории теории вероятностей и в развитии понятия вероятности. Теория вероятностей начиная с Я. Бернулли вступила в новый период развития, который характерен тем, что центральное место заняли предельные теоремы. Первую из них доказал в книге «Искусство предположений» Я. Бернулли (теперь ее называют теоремой Я. Бернулли). В этот период, который продолжался почти 150 лет, вероятность выделилась в особое и очень важное понятие математики. К этому понятию наметились разные подходы, и было дано несколько определений. Вероятность стала проникать во многие сферы человеческой деятельности. Теория вероятностей в начале XIX в. была не только развитой математической дисциплиной, но и орудием, которое начало применяться в других науках. Но, ввиду того, что понятие вероятности оставалось во многом неясным, теория вероятностей к концу этого периода приобрела очень нечеткие очертания, что привело к спаду в ее развитии.

1. Вероятность у Н. Бернулли

Я. Бернулли занимался вероятностными вопросами в течение многих лет. В. В. Бобынин по этому поводу пишет: «К исследованиям по теории вероятностей Я. Бернулли приступил после 1679 г., но не позже 1685 г.» [Бобынин, 1914]. В IV части книги «Искусство предположений» он пишет относительно своей теоремы: «Вот, следовательно, какова задача, которую я здесь решил обнародовать после того, как уже в течение 20 лет владел ее решением» [Бернулли Я., 1913, с. 25].

И хотя Я. Бернулли посвятил своей работе более 20 лет, она осталась неоконченной. Книга была издана на латинском языке через 8 лет после смерти автора, в 1713 г., его племянником Николаем Бернулли (1687—1759).

Н. Бернулли самостоятельно серьезно занимался теорией вероятностей. В 1709 г. он защитил диссертацию для получения степени лиценциата прав «О применении искусства предположений в вопросах права» [Bernoulli N., 1709].

Работа Н. Бернулли состоит из предисловия, девяти глав и следствий. К этому времени Н. Бернулли хорошо знал рукопись Я. Бернулли «Искусство предположений», он на нее часто ссылается. Вообще, вся работа Н. Бернулли написана под сильным влиянием Я. Бернулли. Н. Бернулли ссылается иногда также и на Гюйгенса.

Остановимся на наиболее интересных главах книги Н. Бернулли. Глава I называется «Об искусстве предположений вообще». В начале ее Н. Бернулли пишет о том, что́ он понимает под искусством предположений: «Искусство это есть искусство оценивать с наибольшей возможной точностью вероятности событий с целью получения возможности в своих суждениях и поступках всегда выбирать то или следовать тому, что окажется лучшим, более благоприятным или благоразумным» [Там же]. И далее, в другом месте, он пишет: «Объектом искусства предположений являются, как мы уже сказали, события сомнительные и недостоверные». Далее он подробно рассказывает о задачах этого искусства. Здесь интересно обратить внимание на то, как Н. Бернулли вводит понятие вероятности, а затем пользуется им.

«Вероятность есть степень достоверности и отличается от нее как часть от целого» [Там же]. Достоверность он обозначает единицей. Пусть, например, достоверность состоит «из пяти возможностей или частей, из числа которых три благоприятствуют тому, чтобы некоторое событие произошло в будущем, а остальные препятствуют этому, про такое событие мы скажем, что оно имеет $^3/_5$ достоверности. Таким образом, более вероятным по сравнению с другим называется то событие, которое обладает большей частью достоверности» [Там же]. Говоря о возможностях, Н. Бернулли ничего не говорит о равновозможности, даже косвенно. Положительно-вероятными Н. Бернулли называет те события, вероятности которых «заметно превосходят половину достоверности». Те же события, вероятности которых $\approx {}^1/_2$ достоверности, называются сомнительными. «То, что обладает $^1/_5$ достоверности, вероятнее того, что обладает $^1/_{10}$ ее, но при этом ни то, ни другое не является положительно-вероятным» [Там же].

Не употребляя самого термина «математическое ожидание», Н. Бернулли определяет его следующим образом: «Следует умножить то, что выпадает в отдельных случаях, на число случаев, в которых устанавливается выпадение каждого из них, а сумму произведений разделить на общее число всех случаев; частное же покажет, что вероятно случится, или определит оценку ожидания, или степень искомой вероятности» [Там же]. Действительно, это есть математическое ожидание. Пусть значения случайной величины («то, что выпадает в отдельных случаях») будут x_i, соответствующие частоты — m_i («число случаев, в которых устанавливается выпадение каждого из них»), тогда м. о. $x = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$, что

и предлагает сделать Н. Бернулли. Конечно, здесь частота m/n принимается за вероятность p.

Интересно также, как Н. Бернулли ищет подходящий термин для математического ожидания, называя его «степенью вероятности», «оценкой ожидания» и описательно, как то, что должно вероятно случиться.

«Правило это [правило подсчета математического ожидания] тождественно с тем, с помощью которого обыкновенно отыскивается среднее арифметическое из нескольких данных величин, а также и с тем правилом смешения, на которое счел уместным сослаться мой дядя» [Там же].

Далее Н. Бернулли рассматривает пример, который взят из рукописи Я. Бернулли: «Если 3 кружки вина ценой по 13 смешиваются с 2 кружками ценой по 8, то после перемножения 3 на 13 и 2 на 8 получится общая цена всех кружек — 55, что даст путем деления на число всех кружек, т. е. на 5, среднюю цену одной кружки смеси, равную 11. Такова же должна быть, согласно правилу, и оценка величины ожидания чего-либо, что будет иметь 3 случая по 13 и 2 по 8» [Там же].

Если сравнение математического ожидания со средним арифметическим и стоимостью смеси принадлежит первое Гюйгенсу, а второе Я. Бернулли, то механическое сравнение принадлежит Н. Бернулли.

«Еще более заслуживает быть отмеченным особое и исключительное совпадение, наблюдающееся между этим правилом и тем, которое рекомендуется для нахождения центра тяжести нескольких грузов; действительно, ведь сумма моментов, т. е. сумма произведений весов на соответствующие расстояния от какой-либо данной точки, деленная на сумму весов, показывает расстояние центра тяжести, т. е. той точки, по отношению к которой подвешенные грузы находятся в равновесии; точно так же и та средняя, которая получается согласно настоящему правилу, является, так сказать, центром тяжести всех вероятностей, который их так уравновешивает, что ни та, ни другая из них, отклоняясь в ту или другую сторону от средней, не перевешивают друг друга. В целях соблюдения такого же равновесия в сомнительных и темных делах наши юристы обычно придерживаются середины» [Там же].

В главе II «О способе установления вероятности человеческой жизни» Н. Бернулли, исходя из таблиц Граунта, рассматривает вопрос о вероятности дожития до определенного возраста.

Здесь же Н. Бернулли делает некоторые вероятностные выводы о рождаемости мальчиков и девочек. Если число рождающихся мальчиков будет m, а число рождающихся девочек f, то он принял, что $m : f = 18 : 17$ (Н. Бернулли рассматривал это отношение при $m + f = 14\,000$). Основной вывод, к которому пришел Н. Бернулли, заключается в том, что вероятность того, что число рождений мальчиков находится в пределах

$7200 \pm l \left(7200 = \frac{14000}{18+17} \cdot 18\right)$ возрастает с ростом l. При этом он ссылается на теорему Я. Бернулли.

В главе III «О том, когда следует безвестно отсутствующего считать умершим» Н. Бернулли пишет, что отсутствующего нужно считать умершим, когда вероятность, что он умер, вдвое больше вероятности, что он жив. А это происходит тогда, когда прошло столько лет, что из числа лиц одного возраста с отсутствующим число лиц, умерших за эти годы, вдвое превышает число лиц, оставшихся в живых. Например, 20-летний уехал со своей родины и пропал. По таблицам смертности находим, что только $^1/_3$ 20-летних достигает 58 лет, а $^2/_3$ умирают. Следовательно, через 38 лет после отъезда 20-летнего его нужно считать умершим.

В главе VII «Об играх, пари и лотереях» Н. Бернулли говорит, что игры должны быть справедливыми (безобидными, как говорят теперь), и подробно объясняет, что это означает. Для установления безобидности игры необходимо прибегать к теории вероятностей (к «искусству предположений»), так как «без помощи этого искусства никто не был бы в состоянии без громадного труда отыскать число случаев, благоприятных или неблагоприятных тому или другому из участников игры или пари и отсюда определить, поставлены ли тот и другой в одинаковые условия в отношении проигрыша и выигрыша или нет» [Там же]. Затем подробно рассматривается Генуэзская лотерея.

«Весьма популярны в наше время Генуэзские пари, которые устраиваются всенародно по случаю производящихся ежегодно в Генуе выборов, когда из 100 сенаторов избираются по жребию пятеро для выполнения в этом году высших должностей, и обычно в это время, до вытаскивания жребия, некоторые богатые купцы заключают с другими лицами пари на следующих условиях: всякий, кто желает держать пари, записывает любую сумму и называет пятерых из ста; если после этого один из названных им окажется избранным по жребию, то он получит определенную сумму денег, как было установлено; если окажутся избранными двое, то — бо́льшую; если трое — еще бо́льшую; если четверо — еще бо́льшую; если пятеро — то еще бо́льшую; если же из числа названных никто не окажется избранным, то он теряет свою ставку. Спрашивается, в каком размере должен быть установлен в каждом случае выигрыш, чтобы пари происходило на равных шансах» [Там же].

Н. Бернулли устанавливает, что принятые величины выигрышей очень несправедливы. «Власти ни в коем случае не должны официально разрешать такого рода сделки о пари, как чрезвычайно несправедливые, и купцы обязаны возместить лишнее, полученное ими сверх причитающегося по праву» [Там же]. Далее рассматривается устройство справедливой лотереи и приводится в виде примера бельгийская лотерея пожизненных рент, правила которой были опубликованы в марте 1709 г.

В начале главы IX «О достоверности свидетелей и подозрениях» Н. Бернулли говорит, что при свидетельских показаниях нужно тщательно исследовать вопрос о том, в какой мере свидетель заслуживает доверия. Н. Бернулли указывает правило, по которому можно вычислить вероятность этого доверия: «Правило это следующее: раздели число, указывающее, сколько раз было установлено, что он говорил правду, на общее число как этих случаев, так и тех, когда он был уличен во лжи, и получишь степень достоверности; в том же случае, когда несколько человек испытанной честности свидетельствуют о добросовестности, а другие люди, не менее испытанной честности, обвиняют того же самого человека в вероломстве, то раздели число первых на общее число и тех и других» [Там же].

Конечно, все это очень наивно, но следует отметить, что это, по существу, так называемое классическое определение вероятности, так как предполагается, что свидетельства «людей испытанной честности» равновозможны независимо от того, о чем они свидетельствуют.

Далее Н. Бернулли рассматривает оценку улик, выдвигаемых против кого-нибудь. «При каких-либо данных обстоятельствах вдвое вероятнее, что кто-либо невиновен, чем то, что он виновен; если бы при этом против обвиняемого сначала не было никаких улик, то его невиновность стояла бы вне сомнений, т. е. равнялась бы 1; если же имелась бы одна улика, то невиновность стала бы уже меньше чем 1» [Там же].

Затем приводится следующий расчет. Два шанса говорят за то, что он невиновен, т. е. говорят за то, что вероятность невиновности равна 1, а один шанс (улика)— что вероятность невиновности 0. Следовательно, невиновность (математическое ожидание) будет равна $\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{3} = {}^2/_3$. Если прибавится еще одна улика виновности, то 2 шанса с вероятностью $^2/_3$ говорят о невиновности и 1 шанс говорит о виновности, т. е. с вероятностью 0 о невиновности. Тогда значение для невиновности будет $\frac{2 \cdot (^2/_3) + 1 \cdot 0}{3} = {}^4/_9$. Если будет три улики, то $\frac{2 \cdot (^4/_9) + 1 \cdot 0}{3} = {}^8/_{27}$; четыре $\frac{2\, (^8/_{27}) + 1 \cdot 0}{3} = {}^{16}/_{81}$ и т. д. «Отсюда ясно, что невиновность непрерывно убывает в геометрической прогрессии и всегда равна дроби $^2/_3$, возведенной в ту степень, показатель которой равен числу улик» [Там же]. Например, при 10 уликах «невиновность» приняла бы значение $(2/3)^{10} = 1024/59049$. Эта вероятность столь мала, «что было бы почти морально достоверным совершение преступления» [Там же].

Далее Н. Бернулли рассматривает вопрос об ответственности лица, которому дали на хранение ценную вещь, но вследствие случайных обстоятельств, не зависящих от хранителя, она погибла. На этом глава заканчивается. Она представляет интерес в

первую очередь попытками применить такие основные понятия, как вероятность и математичское ожидание, хотя предмет, к которому они применялись, очень искусственный и не дает реальных возможностей таких применений. Но в подобных более или менее удачных попытках вырабатывались и выкристаллизовывались вероятностные методы и понятия.

В остальных главах речь идет о покупке пожизненных доходов (гл. IV); о применении различных законов (гл. V); о страховании (гл. VI); о распределении доли в наследстве (гл. VIII).

Так называемые «Следствия» не имеют прямого отношения к теории вероятностей. Приведем в виде примера первые два: «1) Независимо от закона нет действий самих по себе почетных или позорных. 2) Математически можно доказать, что допустимо взимать проценты на проценты» [Там же].

В конце книги имеется четверостишие, посвященное самому Н. Бернулли:

«Раз так часто род Бернулли
Всегда, на вечные времена являлся украшением —
Почему нельзя допустить такое же предположение и о тебе,
Если к тому же приводит и искусство предположений».

Эта работа Н. Бернулли получила высокую оценку Лейбница.

В своей работе Н. Бернулли отчетливо выделяет теорию вероятностей в отдельную дисциплину («Искусство предположений»). он также дает определение вероятности, выделяя тем самым это понятие из других научных понятий. Н. Бернулли еще не отдает себе отчета в том, что вероятность является центральным понятием в теории вероятностей. Он развил дальше взгляды Гюйгенса на математическое ожидание и широко его применял при решении задач.

Следует отметить, что и Гюйгенс, и Н. Бернулли математическому ожиданию отводили значительно больше внимания, чем вероятности. Они считали, что применение математического ожидания и есть то специфическое, что отделяет искусство предположений от других наук. Вероятность (отношение шансов) при этом играет вспомогательную роль, используя которую, удобно применять математическое ожидание.

Останавливаясь на взглядах Н. Бернулли на вероятность, на искусство предположений, следует иметь в виду, что он хорошо был знаком с классической работой Я. Бернулли, в которой рассматриваются эти вопросы. Влияние Я. Бернулли на Н. Бернулли несомненно, хотя и не следует отрицать ряд глубоких и самостоятельных выводов последнего.

2. Вероятность у Я. Бернулли

Неоконченная книга Я. Бернулли «Искусство предположений» после смерти автора, в 1705 г., была приобретена издателями братьями Турнизиус, которые и издали ее в 1713 г. с предисловием

Н. Бернулли и под его контролем. Содержание работы Я. Бернулли в общих чертах было к тому времени достаточно широко известно, так как оно было изложено в «Посмертном слове» Фонтенеля, а также было опубликовано в официальном некрологе.

Предисловие Н. Бернулли представляет большой интерес, оно показывает отношение Н. Бернулли к работе Я. Бернулли, вскрывая при этом некоторые неожиданные стороны. Н. Бернулли пишет: «Автор ставил своей целью показать исключительную пользу, которую может оказать в вопросах гражданской жизни до сего времени мало разработанная часть математики, имеющая своим предметом измерение вероятности» [Bernoulli N., 1709]. Итак, основная задача книги, как трактует ее Н. Бернулли, состоит в применении теории вероятностей к гражданским вопросам.

Затем Н. Бернулли пишет о содержании книги.

«Он разделил свой труд на четыре части. Первая содержит рассуждение знаменитого Гюйгенса с примечаниями, которые он счел нужным предпослать своему трактату, как содержащее первые элементы искусства предположений. Вторая часть охватывает теорию перестановок и сочетаний, теорию, столь необходимую для измерения вероятностей, применение которой для решения различного рода задач об азартных играх он объясняет в третьей части своей работы. В четвертой части он хотел указать применение ранее развитых принципов к вопросам гражданским, экономическим и моральным» [Там же]. Но работа осталась неоконченной. Н. Бернулли в первых трех частях видел только подготовительный материал к четвертой и прошел мимо тех крупных самостоятельных результатов, которые в них достигнуты.

Первоначально издатели хотели просить брата Я. Бернулли И. Бернулли взять на себя труд закончить эту работу. Но И. Бернулли был очень занят, тогда издатели обратились с такой же просьбой к Н. Бернулли. Но последний упорно отказывался. «Я был слишком молод и лишен той большой опытности, которую нужно иметь, чтобы исследовать подобные вопросы. Я не считал себя в силах сделать это и полагал, что я не только не выполню ожиданий читателя, но, дав только вульгарное и тривиальное применение, нанесу ущерб всей остальной части работы» [Там же].

Н. Бернулли признается, что он не знает никаких заслуживающих внимания применений теории вероятностей, кроме вульгарных и тривиальных, к гражданским, как он их называет, вопросам. Но он верил, что такие применения существуют, их знал, но не успел изложить Я. Бернулли. Поэтому он обращается в предисловии с просьбой к де Муавру: «Однако, так как не следует, чтобы столь полезный предмет, как применение теории вероятностей к политическим и экономическим вопросам, впал в полное пренебрежение, мы просим благороднейшего господина, славного де Муавра, который недавно опубликовал великолепные образцы этого искусства, взяться за эту работу и опубликовать своевременно свои исключительные открытия» [Там же].

Как мы увидим ниже, де Муавр тоже по этому вопросу ничего не написал, не найдя соответствующих приложений и думая, что такой материал содержится в рукописи Я. Бернулли, с которой он не был знаком.

Заканчивается предисловие Н. Бернулли словами: «Мы надеемся, во всяком случае, что общие принципы, изложенные автором в пяти главах последней части, будут полезны читателю для решения частных вопросов. Вот что мы считали нужным сказать о самом трактате» [Там же].

Н. Бернулли не сумел оценить работу Я. Бернулли, в особенности ее четвертую часть. Но это не означает, что Н. Бернулли не был знаком с работой Я. Бернулли, как иногда утверждается [1].

Вся работа Я. Бернулли фактически никогда не привлекала внимание исследователей. Писали в основном только о IV части, и то не как о цельном произведении, а как о части, в которой доказана знаменитая теорема Я. Бернулли. Первую же часть вообще обходили молчанием, так как считали, что она состоит из перепечатки трактата Гюйгенса и каких-то, подразумевали, незначительных примечаний Я. Бернулли. Правда, Тодхантер [Todhunter, 1865] писал, что примечания Я. Бернулли более значительны, чем трактат Гюйгенса, но это прошло незамеченным.

Первая часть книги «Искусство предположений» называется «Сочинение о возможных расчетах в азартной игре Христиана Гюйгенса с замечаниями Якова Бернулли». В ней содержится трактат Гюйгенса «О расчете в азартных играх», состоящий из 14 «Предложений». К каждому «Предложению» Я. Бернулли делает свои примечания.

К первому «Предложению» Гюйгенса («Если я имею равные шансы получения a или b, то это мне стоит $(a + b)/2$») Я. Бернулли делает довольно обширное примечание, так как считает, что в этом предложении и следующих, где число слагаемых более двух, а также в случае, когда слагаемые имеют разные веса, содержится основной принцип теории вероятностей («искусства предположений»).

«Автор этого трактата излагает... в этом и двух следующих предложениях основной принцип искусства предположений. Так как очень важно, чтобы этот принцип был хорошо понят, то я попытаюсь доказать его при помощи исчислений более обычных и более доступных всем, исходя исключительно из той аксиомы или определения, что каждый должен ожидать или предполагает ожидать столько, сколько он неминуемо получит» ([Bernoulli J., 1899, с. 5].

Далее рассматривается пример. Предположим, кто-то спрятал

---

[1] Н. Бернулли к основной работе Я. Бернулли в подготовленном издании присоединил его сочинение на французском языке об игре в мяч. В этой работе ловкость игрока определяется путем многочисленных испытаний, т. е. статистическим методом.

в одной руке 3 монеты (a монет), а в другой 7 (b монет). Два человека указывают на разные руки и получают находящиеся в них монеты. Вместе они получают 10, т. е. $a + b$ монет. «Каждый из нас имеет одинаковое право на то, что мы вместе ожидаем; отсюда следует, что предмет общего ожидания должен быть разделен на две равные части, и каждому из нас будет причитаться ровно половина того, что мы ожидаем вместе, т. е. 5 (или $(a + b)/2$)» [Там же]. В случае, если в одной руке будет a, а в другой ничего не будет, то ожидание каждого станет равным $a/2$.

Я. Бернулли считает, что это предложение Гюйгенса (наряду с двумя последующими) выражает основной принцип теории вероятностей. Но эти предложения указывают на роль математического ожидания в вероятностных подсчетах. Действительно, теория вероятностей стала принимать вид отдельной математической дисциплины с того времени, когда был выработан первый специфический метод — метод математического ожидания.

Хотя термин «математическое ожидание» и был уже в переводе Схоутена работы Гюйгенса, Я. Бернулли его не применяет, а термин «ожидание», которым он пользуется, широко употребляется в обыденной речи, поэтому он объясняет, как нужно понимать этот термин.

«Слово „ожидание“ здесь не должно пониматься в его обычном смысле, согласно которому „ожидать“ или „надеяться“ относится к событию наиболее благоприятному, хотя может произойти наихудшее для нас. Нужно понимать под этим словом ту надежду, которую мы имеем на получение лучшего, уменьшенную страхом худшего. Так что стоимость нашего ожидания всегда означает нечто среднее между лучшим, на что мы надеемся, и худшим, чего мы боимся. Таким образом следует его понимать здесь и далее» [Там же].

В «Предложении II» Гюйгенс говорит, что если одинаково легко ожидаются сумма a, b и (или) c, то цена ожидания будет равна $(a + b + c)/3$.

Я. Бернулли по этому поводу рассматривает следующий пример. В трех ящиках спрятаны суммы a, b и c. Каждый из трех играющих берет содержимое одного из ящиков. Все трое забирают всю сумму $a + b + c$. Но никто из играющих не имеет никакого преимущества перед другими, следовательно, ожидание каждого из них будет равно $^1/_3$ всей суммы, т. е. $(a+b+c)/3$. Если играющих четверо и имеется четыре ящика, в которых спрятаны суммы a, b, c, d, то ожидание каждого будет $(a+b+c+d)/4$, если играющих пятеро и имеется 5 ящиков, то ожидание будет соответственно $(a+b+c+d+e)/5$ и т. д., хотя Я. Бернулли и не указывает записи с произвольным числом ящиков.

В «Предложении III» Гюйгенс пишет: «Если число случаев, в которых получается сумма a, равно p и число случаев, в которых происходит сумма b, равно q и все случаи могут получиться одинаково легко, то стоимость моего ожидания равна

$(pa+qb)/(p+q)$». Это, по существу, есть определение математического ожидания для дискретных случайных величин.

Я. Бернулли доказывает это «Предложение» следующим образом. Пусть число игроков и число ящиков будет равно числу случаев, т. е. $p+q$. В каждом из p ящиков находится сумма a, в каждом из q ящиков — сумма b. Каждый игрок получает один из ящиков. Все вместе получат все ящики, т. е. они получат всю сумму $pa+qb$. Все из игроков имеют одинаковое ожидание, следовательно, ожидание каждого будет $(pa+qb)/(p+q)$. Я. Бернулли пишет, что таким же образом можно доказать, что если имеется p случаев для a, q для b и r для c, то ожидание будет $(pa+qb+rc)/(p+q+r)$.

Далее Я. Бернулли рассматривает различные частные случаи.

Если имеется p случаев для получения суммы a и q случаев, в которых нельзя ничего получить, то ожидание будет $pa/(p+q)$.

«Если я имею p случаев для получения a, q — для получения b и r — для c, то мое ожидание будет равно тому же, если бы, соединив p и q, я имел бы $p+q$ случаев для $(pa+qb)/(p+q)$ и r случаев для c» [Там же, с. 10]. Действительно, поступая по общему правилу, получаем

$$\frac{(p+q)\dfrac{pa+qb}{p+q}+rc}{(p+q)+r}=\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}.$$

Рассмотрим еще один пример, предложенный Я. Бернулли.

Пусть имеется p случаев для получения a и q случаев для того, чтобы ничего не получить, пусть также ставка будет $a/2$.

«Я рассматриваю, что, получив ставку a, я выиграю только $\frac{1}{2}a$, и что если я не получаю ничего, то я теряю $\frac{1}{2}a$, т. е. получаю $\frac{1}{2}a$. Следовательно, участь [математическое ожидание] будет равна

$$\frac{p\dfrac{a}{2}+q\left(-\dfrac{a}{2}\right)}{p+q}=\frac{(p-q)\dfrac{a}{2}}{p+q}\text{» [Там же, с. 11].}$$

Достаточно подробно, на многочисленных примерах рассмотрев свойства математического ожидания и его применение при решении различных задач, Я. Бернулли делает такое заключение:

«Из рассмотрения... очевидно, что имеется большое сходство с правилом, называемым в арифметике правилом товарищества, которое состоит в нахождении цены смеси, составленной из определенных количеств различных вещей с различной ценой. Или, скорее, что вычисления являются абсолютно одинаковыми. Так, подобно тому, как сумма произведений количеств смешиваемых веществ на их соответственные цены, разделенная на сумму веществ, дает искомую цену, которая всегда находится между крайними ценами, также сумма произведений случаев соответственно на приносимые ими выгоды, разделенная на число всех случаев,

указывает стоимость ожидания, которая вследствие этого всегда является средней между наибольшей и наименьшей из этих выгод» [Там же, с. 11—12].

После этого следует числовой пример, использованный уже Н. Бернулли. Смешиваются 3 сосуда вина по 13 марок и 2 сосуда по 8. Какова цена смеси? Решение: $\frac{3 \cdot 13 + 2 \cdot 8}{5} = 11$. «Такова также, согласно правилу, стоимость ожидания того, кто имел бы 3 случая для 13 и 2 случая для 8» [Там же, с. 12].

«Предложением» четвертым у Гюйгенса начинается серия задач на справедливое разделение ставки.

Я. Бернулли прежде всего обращает внимание, что во всех таких задачах нужно принимать в расчет только игры, недостающие каждому из игроков, и не обращать никакого внимания на уже сыгранные партии.

Далее в очень оригинальной форме он разъясняет применение теоремы сложения вероятностей, в частности невозможность ее применения для совместных событий.

«Если два человека, достойные смертной казни, принуждаются бросить кости при условии, что тот, кто выбросит меньшее число очков, понесет свое наказание, а другой, который выбросит большее число очков, сохранит свою жизнь, и что оба они сохраняют жизнь, если выбросят одинаковое число очков, то мы найдем для ожидания одного $\frac{7}{12}a$, или $\frac{7}{12}$ жизни. Из этого не следует заключать, что ожидание другого будет $\frac{5}{12}$ жизни, так как очевидно, что здесь обе участи одинаковы, другой также будет ожидать $\frac{7}{12}$ жизни, что дает для обоих $\frac{7}{6}$ жизни, т. е. больше целой жизни. Причиной этого является то, что нет ни одного случая, в котором хотя бы один не остался живым, а имеется несколько случаев, когда они оба могут остаться в живых» [Там же, с. 14].

В конце рассмотрения четвертого «Предложения» Гюйгенса Я. Бернулли пишет:

«Во сколько раз ожидание одного игрока превосходит ожидание другого, во столько раз для того, чтобы игра была справедливой, его ставка должна превосходить ставку его противника» [Там же, с. 15].

В примечании к пятому «Предложению» Гюйгенса Я. Бернулли отмечает следующую закономерность. Если при справедливом разделе ставки a первому игроку недостает одной партии, а второму — двух, то первый должен получить $^3/_4\ a$, а второй $^1/_4\ a$. Если второму будет недоставать 3 партий, то первый получит $^7/_8\ a$, если 4, то $\frac{15}{16}a$, пяти $\frac{31}{32}a$, шести $\frac{63}{64}a$, семи $\frac{127}{128}a$. Перечислив эти результаты, Я. Бернулли делает вывод: «В общем виде, если мне недостает одной партии, а ему какого-нибудь числа, то моя участь

будет относиться к его, как степень числа 2, показателем которой является недостающее другому число игр, уменьшаемая на единицу, относится к единице» [Там же, с. 16]. Другими словами, если первому игроку недостает 1 партии, а второму n, то ставку нужно делить в отношении $(2^n - 1):1$.

К шестому «Предложению» Я. Бернулли примечаний не делает. К «Предложению» же седьмому примечание довольно обширное. Вначале Я. Бернулли сравнивает доли ставок, которые должны получить игроки, если им осталось выиграть 2 и 4 партии, с долями ставок, если осталось 3 и 6 партий. В первом случае, если ставка a, один получает $\frac{13}{16}a$, другой $\frac{3}{16}a$; во втором случае один $\frac{219}{256}a$, что больше чем $\frac{13}{16}a$. Также не равны доли, если двум игрокам осталось выиграть 1 и 4 партии, с теми, кому осталось выиграть 2 и 8. Далее Я. Бернулли говорит об осторожности при выводах, связанных с вероятностными расчетами.

«И хотя, может быть, не существует человека, который не был бы убежден, что участи должны быть одинаковыми, если число недостающих партий той и другой стороны находятся в одном и том же отношении, если бы вычисление не показало нам обратное. Мы должны отсюда научиться быть осторожными в наших суждениях и не основывать наши рассуждения на первой представившейся аналогии, что, однако, представляется весьма обычным даже для лиц, считающихся наиболее разумными» [Там же, с. 17].

Затем Я. Бернулли говорит, что Гюйгенс приводит таблицу для долей ставки трех игроков при различном количестве оставшихся партий, но у него нет таблицы для двух игроков. Поэтому он приводит такую таблицу.

Числа в таблице составляются следующим способом. В первом столбце стоят степени $^1/_2$. В первой строке стоят дроби вида

Таблица для двух игроков

Число игр, которое осталось выиграть		Игроку *B*			
		1	2	3	4
Игроку *A*	1	1 : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16
	2	1 : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32
	3	1 : 8	5 : 16	15 : 32	42 : 64
	4	1 : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128
	5	1 : 32	7 : 64	29 : 128	93 : 256
	6	1 : 64	8 : 128	37 : 256	130 ; 512
	7	1 : 128	9 : 256	46 : 512	176 : 1024
	8	1 : 256	10 : 512	56 : 1024	232 ; 2048
	9	1 : 512	11 : 1024	67 : 2048	299 ; 4096

Таблица для двух игроков (продолжение)

Число игр, которое осталось выиграть		Игроку B		
		5	6	7
Игроку A	1	31 : 32	63 : 64	127 : 128
	2	57 : 64	120 : 128	247 : 256
	3	99 : 128	219 : 256	466 : 512
	4	163 : 256	382 : 512	848 : 1024
	5	256 : 512	638 : 1024	1486 : 2048
	6	386 : 1024	1024 : 2048	2510 : 4096
	7	562 : 2048	1586 : 4096	4096 : 8192
	8	794 : 4096	2380 : 8192	6476 : 16384
	9	1093 : 8192	3473 : 16384	9949 : 32768

$(2^n-1)/2^n$. На всех остальных местах стоят суммы (у Я. Бернулли ошибочно сказано: полусуммы) непосредственно предшествующих членов по строке и столбцу. Например, 57 : 64, получено как $(26+31):(32+32) = 57:64$.

В примечании к «Предложению VIII» Я. Бернулли несколько по-иному, чем у Гюйгенса, решается следующая задача. Три игрока A, B и C играют в некоторую игру до определенного числа партий, но прерывают игру, когда игрокам A и B недостает по одной партии, а C — двух. Как справедливо разделить ставку?

9-е «Предложение» Гюйгенса подводит итог задачам на раздел ставки.

«Чтобы вычислить часть каждого игрока из какого угодно их количества, которым недостает определенного числа партий, нужно сначала принять во внимание, что причитается игроку, часть которого мы желаем найти, если он сам или кто-либо другой из игроков выиграет первую следующую партию. Эти части сложить в одну сумму и полученную сумму разделить на число игроков, что и укажет искомую часть» [Там же, с. 19].

Иллюстрируя это правило, Гюйгенс составляет таблицу для трех игроков, которую мы приводили выше.

Гюйгенс девятое «Предложение» дополняет небольшой заметкой «Об игре в кости», в которой говорит, что это предложение можно применять в играх. Для этого нужно уметь считать, сколькими способами может выпасть то или иное число очков при различном количестве костей. Для удобства он приводит таблицу для трех костей.

Эта заметка Гюйгенса также приведена в книге Я. Бернулли.

Примечание Я. Бернулли относится именно к этой заметке. Я. Бернулли говорит о том, что рассуждения Гюйгенса можно распространить на любое число костей. Но при этом всегда сущест-

вует опасность, что, подсчитывая при большом числе костей количество различных способов выпадения того или иного числа очков, можно пропустить некоторые способы. Я. Бернулли излагает правила перебора различных исходов, чтобы не пропустить ни одной комбинации костей. Так, для получения 12 очков на 4 костях он приходит к следующей таблице.

Способы	Число бросаний	Способы	Число бросаний
6.4.1.1	12	6.2.2.2	4
5.5.1.1	6	5.3.2.2	12
6.3.2.1	24	4.4.2.2	6
5.4.2.1	24	4.3.3.2	12
5.3.3.1	12	3.3.3.3	1
4.4.3.1	12		
		Всего:	125

В первом столбце указаны очки на костях, при наличии которых может быть получено 12 очков на 4 костях. Во втором столбце указано количество способов, которыми может осуществиться в сумме 12 очков при указанных очках на отдельных костях. Например, 12 очков, полученных из чисел на 4 костях 5.4.2.1, может быть осуществлено 24 способами. Всего 12 очков на 4 костях может быть получено 125 способами.

«Так как действительно этот способ [т. е. те правила перебора, которые Я. Бернулли излагал выше] отыскания числа бросаний при многих костях свыше меры скучен и длинен, то я дальше укажу, каким образом можно достигнуть того же не только для определенного числа очков, но для всех без исключения чисел очков при помощи приближенной таблицы, которая не только легко может быть построена, но и очевиднее показывает природу и последовательность, которую образуют числа бросаний» [Там же, с. 25].

Результаты таблицы, которую приводит Я. Бернулли, можно выразить следующим образом: число способов, которыми может быть получено m очков при бросании n костей, равно коэффициенту x^m в разложении $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$.

К «Предложению» XI Я. Бернулли делает следующее примечание: «Автор установил... что можно с выгодой взяться выбросить одной костью в четыре бросания шестерку, теперь он удостоверяет, что нельзя без убытка взяться выбросить на двух костях две шестерки в 24 бросаниях. Это может показаться абсурдным большому количеству людей, так как существует точно такое же отношение между 24 бросаниями и 36 положениями двух костей, как между 4 бросаниями и 6 положениями одной кости» [Там же, с. 32].

В примечании к XII «Предложению» Я. Бернулли получает результат, который мы теперь называем формулой Бернулли. Он устанавливает вероятность того, что событие A $(P(A) = p)$ появится при n испытаниях m раз. Это вошедшая во все

учебники формула

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$. В конце первой части Я. Бернулли подробно решает четыре задачи, которые предложил Гюйгенс в своей книге (пятую он решает в третьей части своей книги). Во многих случаях Я. Бернулли развивал далее «Предложения» Гюйгенса, получая новые формулы и излагая свои взгляды.

Возвращаясь к Гюйгенсу, мы должны подчеркнуть, что в разработке основ теории вероятностей он продвинулся значительно дальше Паскаля и Ферма (и независимо от них). Его работа оказала существенное влияние на Я. Бернулли. В первой части «Искусства предположений» Я. Бернулли, следуя за Гюйгенсом, центральное место отводит математическому ожиданию, хотя он уже формулирует и некоторые свойства вероятности, в первую очередь это относится к теореме сложения вероятностей.

В литературе иногда высказывают необоснованное мнение о том, что на Я. Бернулли оказала (через Гюйгенса) влияние переписка Паскаля и Ферма (см., например, [Реньи, 1970, с. 79]). Хотя переписка ко времени работы Я. Бернулли над книгой была уже издана, но она его, по-видимому, не заинтересовала, так как в книге Гюйгенса все затрагиваемые в переписке вопросы разобраны значительно глубже и полнее. Во времена Я. Бернулли переписка Паскаля и Ферма могла вызвать только исторический интерес, в то время как работа Гюйгенса оказывала влияние на дальнейшую разработку вероятностных вопросов.

Часть II работы Я. Бернулли посвящена теории сочетаний, она называется: «Учение о перестановках и сочетаниях».

Теория сочетаний была необходима для решения многих задач теории вероятностей того времени. До применения анализа бесконечно малых в теории вероятностей, что было сделано несколько позже, теория сочетаний была основным аппаратом теории вероятностей. На примере развития комбинаторики и теории вероятностей видно, как взаимно влияли друг на друга эти два раздела математики.

Развитие комбинаторики оказало также влияние на формирование понятия вероятности. С самого начала своего выделения из других понятий вероятность выступала как отношение шансов, возможностей, исходов и т. п. Но для того чтобы составить отношение, нужно было найти число шансов и т. п. Если в простых задачах эти числа находились просто, то в сложных, как мы неоднократно уже видели, без комбинаторики обойтись было нельзя. Чем дальше развивалась комбинаторика, тем более сложные задачи могла рассматривать теория вероятностей, а чем более сложные были задачи, тем содержательнее был материал, на котором вырабатывалось понятие вероятности. На простых задачах можно выработать очень бедное по содержанию понятие вероятности.

Я. Бернулли указывает, что такие известные математики, как Лейбниц, Валлис, Схоутен и другие, занимались комбинаторикой, чтобы не создавалось заблуждений, что все им излагаемое является новым. Начало комбинаторики как раздела математики было положено Лейбницем в его «Рассуждении о комбинаторном искусстве» (1666). Отметим еще несколько работ, которые оказали существенное влияние на развитие комбинаторики. Это работа Валлиса «Рассуждение о сочетаниях, перестановках и т. д.» (1685); работа Ф. де Бесси (ок. 1602—1675) «Резюме о соединениях» (опубл. в 1729) и др.

К работам своих предшественников Я. Бернулли прибавил различные свои результаты, которые, как он считает, не следует недооценивать. В особенности он подчеркивал свое исследование фигурных чисел. Я. Бернулли пишет, что не существует полного изложения теории сочетаний и поэтому он излагает здесь все необходимые сведения подробно и с самого начала.

Теория сочетаний широко применялась при составлении анаграмм, а также при составлении стихов протей. Стихами протей назывались стихи, составленные из слов данного стиха. Начало II части Я. Бернулли посвящает этим вопросам. Для математической лингвистики этот материал представляет не только исторический интерес.

Наряду с получением ряда свойств перестановок и сочетаний Я. Бернулли исследует различные сочетания с повторениями.

В дальнейшем он рассматривает последовательности так называемых фигурных чисел, которые он сводит в таблицу, и устанавливает ряд свойств этих чисел. На основании установленных свойств Бернулли находит формулы для сумм одинаковых степеней чисел натурального ряда до десятой степени включительно, при этом он получает числа, которые Эйлер назвал числами Бернулли.

Часть III называется: «Применение учения о сочетаниях к различным случайным играм и играм в кости». Эта часть содержит 24 задачи с подробными решениями. Приведем условия некоторых задач.

«1) Некто положил в урну два шара, белый и черный, и предложил трем игрокам премию при условии, что ее получит тот, кто первый вытянет белый шар; но если никто не вытянет белый шар, то они премии не получат. Первым извлекает шар A и кладет его обратно, затем вторым испытывает счастье B и в конце, третьим, C. Какие шансы имеют эти три игрока?».

«5) A держит пари с B, что он вытянет из 40 игральных карт. из которых по 10 карт разной масти, четыре разномастных карты. Как относятся шансы обоих друг к другу?».

«12) Некто желает при 6 бросаниях кости получить все 6 граней в таком порядке: при первом бросании одно очко, при втором — два и т. д. Как велико его ожидание?».

В ряде задач требуется подсчитать ожидание выигрыша в некоторой азартной игре. Как мы видим, это в основном довольно распространенные для того времени задачи, иногда несколько усложненные. В первой части своей книги Я. Бернулли неоднократно упрекал Гюйгенса в том, что он решает числовые задачи, а не задачи в общем виде при помощи букв, что давало бы возможность вскрыть общие закономерности. Следуя своему совету, в третьей части Бернулли ряд элементарных, но достаточно сложных задач решает в общем виде.

Рассмотренные три части представляют несомненный интерес для истории математики. В них часто по-новому осмысливаются уже ставшие стандартными некоторые задачи теории вероятностей. Полностью осознана роль комбинаторики в теории вероятностей того времени. Впервые последовательно изложена теория соединений, причем получено много новых свойств и различных формул; получены иногда очень интересные результаты и по другим разделам. Уже эти три части являются существенным вкладом в развитие не только теории вероятностей, но и математики вообще.

Но основной частью книги, которая, по существу, является новым этапом в истории вероятностей, является IV часть: «Применение предыдущего учения к гражданским, моральным и экономическим вопросам». Она содержит доказательство теоремы Я. Бернулли, т. е. закона больших чисел в его простейшей форме. Эта часть осталась неоконченной, она обрывается на окончании доказательства теоремы Бернулли. Но из заглавия следует, что Я. Бернулли ставил своей целью показать применение теории вероятностей к гражданским, моральным и экономическим вопросам. Об этом совершенно отчетливо пишет и Николай Бернулли в своем предисловии к книге Я. Бернулли.

Поэтому особенно в IV части он касается многих общих и философских вопросов, связанных с вопросами теории вероятностей. Он отчетливо стоит на точке зрения метафизического детерминизма. Более того, получивший широкое распространение так называемый лапласовский детерминизм не менее последовательно и точно, а часто даже в близких выражениях мы находим у Я. Бернулли. В I главе этой части, которая является введением, он говорит о достоверности, необходимости, случайности и многих других вопросах. В частности, он пишет: «Если не наверно случится то, чему определено случиться, то непонятно, как может остаться непоколебленной хвала всеведению и всемогуществу величайшего творца» [Бернулли Я., 1913, с. 1]. «Совершенно несомненно, что при данном положении кости, скорости и расстояния от доски в тот момент, когда кость оставляет руку бросающего, она не может падать иначе, чем падает на самом деле. Равным образом, при данном составе воздуха и данных массах, положениях, направлениях, скоростях ветров, паров и облаков, а также механических законах, по которым все это взаимодействует, завтрашняя погода

не может быть иной, чем та, которая на самом деле должна быть. Так что эти явления из своих ближайших причин следуют с не меньшей необходимостью, чем затмения из движения светил. И, однако, обычно только затмения причисляются к явлениям необходимым, падение же кости и будущая погода — к случайным. Причина этого исключительно та, что предполагаемое данным для определения последующих действий на самом деле в природе нам недостаточно известно. И если бы даже это было известно, то недостаточно развиты математические и физические знания, чтобы исходя из данных причин подвергнуть такие явления вычислению подобно тому, как из совершенных принципов астрономии могут быть предвычисляемы и предсказываемы затмения... Случайность главным образом зависит от нашего знания» [Там же, с. 3—4].

Глава II начинается со следующего определения: «Искусство предположений (Ars conjectandi) у нас определяется как искусство возможно точнее измерять вероятности вещей, затем, чтобы в наших суждениях или действиях мы могли всегда выбирать или следовать тому, что будет найдено лучшим, более удовлетворительным, спокойным и разумным. В этом единственно заключается вся мудрость философа и благоразумие политика» [Там же, с. 6].

Здесь Я. Бернулли, по-видимому, впервые тесно связывает искусство предположений и вероятность. Искусство предположений служит для вычисления вероятностей, т. е. искусство предположений есть теория вероятностей, основным понятием которой является вероятность.

Прежде чем приступить к основной задаче, которую Я. Бернулли определяет как вычисление различных вероятностей, он пишет, что «полезно предпослать некоторые общие правила или аксиомы». Он их приводит девять. Чтобы представить характер этих правил, приведу некоторые из них:

«1) Догадкам не место в тех вещах, где можно достигнуть полной достоверности».

«6) Что в некотором случае полезно, но ни в каком не вредно, следует предпочитать тому, что никогда не приносит ни пользы, ни вреда».

«7) Не следует оценивать людей по их результатам» и т. п.

Далее он пишет: «Много других подобного рода положений каждый ... может составить сам для себя». Только после всех этих предварительных рассуждений и замечаний он начинает в главах III и IV подходить к формулировке своей основной задачи.

Он пишет: «Сила доказательства, свойственная какому-либо доводу, зависит от числа случаев, при которых он может существовать или не существовать, доказывать или не доказывать или даже доказывать противное» [Там же, с. 13—14].

Далее он переходит к одному из центральных мест. По существу, он дает довольно хорошее объяснение статистическому понятию вероятности. «Все дело сводится к тому, чтобы для правильного составления предположений о какой-либо вещи были точно

исчислены как числа случаев, так и было бы определено, насколько одни случаи могут легче встретиться, чем другие. Но здесь мы, по-видимому, встречаем препятствие, так как только крайне редко это возможно сделать и почти нигде не удается, кроме игр, зависящих от случая, которые впервые изобретатели постарались сделать безобидными, устроили так, чтобы были совершенно известны числа случаев, влекущих выигрыш или проигрыш, а сами случаи могли бы встретиться одинаково легко. В большинстве же других явлений, зависящих или от действия сил естественных, или от свободной воли людей, не имеют места ни то, ни другое... Кто из смертных когда-либо определит как число случаев число, например, болезней и насколько одна болезнь легче погубит человека, чем другая, например чума, чем водобоязнь». Результат в этих случаях «зависит от причин, совершенно скрытых и, сверх того, вследствие бесконечного разнообразия их сочетаний всегда ускользающих от нашего познания, и было бы совершенно безумно желать что-либо узнать таким путем. Но здесь нам открывается другая дорога для достижения искомого. И что не дано вывести априори, то, по крайней мере, можно получить апостериори, т. е. из многократного наблюдения результатов в подобных примерах. Потому, что нужно предполагать, что некоторое явление впоследствии в стольких же случаях может случиться или не случиться, в скольких при подобном же положении вещей раньше оно было отмечено случившимся или неслучившимся... Этот опытный способ определения числа случаев по наблюдениям не нов и не необычен... то же все постоянно соблюдают в повседневной практике» [Там же, с. 20—22].

Далее Я. Бернулли еще более глубоко развивает свою мысль. «Для такого рассуждения... требуется большой запас наблюдений... Хотя это, естественно, всем известно, однако доказательство, извлекаемое из научных оснований, вовсе не так обычно, и потому нам предстоит его здесь изложить. Причем я счел бы для себя малой заслугой, если бы остановился на доказательстве того, что все знают. Здесь для рассмотрения остается нечто, о чем до сих пор, может быть, никто и не думал. Именно, остается исследовать, будет ли при таком увеличении числа наблюдений вероятность достичь действительного отношения между числами случаев, при которых какое-либо событие может случиться или не случиться, постоянно возрастать так, чтобы, наконец, превзойти всякую степень достоверности, или же задача, так сказать, имеет свою асимптоту, т. е. имеется такая степень достоверности, которую никогда нельзя превзойти, как бы ни умножались наблюдения» [Там же, с. 23—24].

«Чтобы не понимать этого превратно, следует заметить, что отношение между числами случаев, которые мы желаем определить опытом, понимается не в смысле точного отношения... но до известной степени приближенного, т. е. заключенного в двух границах, которые можно взять сколь угодно тесными... Вот, следо-

вательно, какова задача, которую я здесь решил обнародовать после того, как уже в течение 20 лет владел ее решением» [Там же, с. 25]. Только после такого длительного разъяснения в главе V он приступает к доказательству своей теоремы.

Мы привели некоторые высказывания Я. Бернулли, так как в них впервые дается определение вероятности через статистические наблюдения (статистическое определение вероятности). Другой вероятности у Я. Бернулли не было. Поэтому ошибочны утверждения, которые говорят, что «Бернулли дает в основных чертах и так называемое классическое определение вероятности» [Реньи, 1970, с. 80] как отношение числа благоприятных случаев к числу всех возможных случаев, причем все случаи предполагаются равновозможными.

Я. Бернулли подчеркивает тесную связь наблюдаемой частоты появления событий с его вероятностью. Изучение этой связи и привело Я. Бернулли к его знаменитой теореме.

Вначале Я. Бернулли доказывает ряд вспомогательных теорем, а затем формулирует, как он сам называет, «главное предложение». «Наконец, следует само предложение, ради которого сказано все предыдущее и доказательство которого вытекает из одного лишь применения предварительных лемм ... Пусть число благоприятных случаев относится к числу неблагоприятных точно или приближенно, как r к s, или к числу всех случаев, как r к $r+s$ или r к t, это отношение заключается в пределах $(r+1)/t$ и $(r-1)/t$. Требуется доказать, что можно взять столько опытов, чтобы в какое угодно данное число раз (C) было вероятнее, что число благоприятных наблюдений попадет в эти пределы, а не вне их, т. е. что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех будет не более чем $(r+1)/t$ и не менее чем $(r-1)/t$» [Там же, с. 37].

Впоследствии Пуассон называл теорему, доказанную Я. Бернулли, законом больших чисел. Суть закона больших чисел у Я. Бернулли состоит в следующем. Вначале в леммах он рассматривает чисто алгебраическое утверждение. Берется разложение $(r+s)^{nt}$, где $t=r+s$ и n — большое натуральное число, $r>0$ и $s>0$. Доказывается, что при достаточно большом nt сумма $2n$ средних членов разложения может стать больше чем в C раз по сравнению с суммой остальных членов разложения, где $C>0$ — заранее заданное число.

Затем в «главном предложении» этот результат применяется в вероятностных рассуждениях. «Главное предложение» говорит о том, что если вероятность появления события в единичном испытании равна $r/(r+s)$, а nt — количество испытаний, тогда при достаточно большом nt вероятность того, что число появления события будет находиться в пределах $n(r+1)$, $n(r-1)$, может более чем в C раз превышать вероятность противоположного события.

Очевидно, что это утверждение эквивалентно теореме Я. Бернулли, излагаемой в современных книгах по теории вероятностей.

Теорема Я. Бернулли имеет первостепенное значение в приложениях теории вероятностей. Она привлекала к себе внимание всех, кто соприкасался с этой наукой. С законом больших чисел, с его трактовкой переплетаются многие методологические и философские вопросы. Именно поэтому мы считаем необходимым остановиться на сущности этой теоремы.

Пусть производится последовательность из n независимых испытаний, при каждом испытании вероятность наступления события A равна одному и тому же числу p. В этом случае мы не можем ничего утверждать относительно появления события A в каждом отдельном испытании. Но нам известно, что чем больше вероятность p, тем чаще должно наступать событие A. Более того, мы можем установить связь между результатами испытаний (частотой) и вероятностью.

Пусть в n независимых испытаниях событие A появится m раз. Величина разности $\frac{m}{n} - p$, (где m/n называется частотой) есть случайная величина, но чем больше число испытаний n, тем реже она получает большие значения. Мы можем даже утверждать, что какое бы положительное число мы ни взяли, абсолютная величина разности $\frac{m}{n} - p$ почти с достоверностью будет меньше, чем это число, если n достаточно велико.

После этих замечаний для сравнения с формулировкой самого Я. Бернулли дадим современную формулировку его теоремы: Если вероятность наступления события A в последовательности независимых испытаний постоянна и равна p, то, каково бы ни было положительное число ε с вероятностью, как угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний n разность $\frac{m}{n} - p$ по абсолютной величине окажется меньшей, чем ε.

Теорему Бернулли можно записать еще так: при достаточно большом n

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \eta,$$

где ε и η — любые малые числа.

Сделаем еще некоторые замечания.

Всегда может случиться, что, каким бы большим ни было n, в данной серии из n испытаний $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ окажется больше ε. Но согласно теореме Бернулли мы можем утверждать, что если n достаточно велико и если произведено достаточно много серий испытаний по n испытаний в каждой серии, то в подавляющем числе серий неравенство $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$ будет выполнено.

Теорема Бернулли совсем не утверждает, что при бесконечном увеличении числа испытаний n частота m/n стремится к числу p,

т. е. что $\lim_{n\to\infty} (m/n) = p$; она утверждает, что верятность больших отклонений частоты m/n от вероятности p мала, если только n достаточно велико.

Теорема Я. Бернулли явилась громадным вкладом в теорию вероятностей, она играет первостепенную роль в различных практических применениях теории вероятностей.

Теорему Бернулли неоднократно подтверждали специально поставленными экспериментами, в первую очередь с бросанием монет. Основное внимание в этих экспериментах было обращено на то, что при достаточно большом числе испытаний частота события становится как угодно близка к его вероятности. Но не следует забывать, что это утверждение только вероятно, но не достоверно, а события, имеющие даже очень маленькую вероятность, могут произойти (так же как и события, имеющие очень большую вероятность, могут не произойти).

В 1777 г. Бюффон проделал опыт с бросанием монеты. Из 4040 раз герб выпал 2048 раз и решетка 1992 раза. Частота для герба $2048/4040 = 0{,}507$, а для решетки $1992/4040 = 0{,}493$, что достаточно близко к 0,5.

В начале XIX в. де Морган проделал такой же опыт: из 4092 раз герб выпал 2048 раз, а решетка — 2044, что дает для частот значения 0,5005 и 0,4955.

Джевонс в книге «Принципы науки» (1887) приводит результаты своих опытов с бросанием монет. Он произвел две серии бросаний десяти монет по 1024 раза. При бросании 10 монет могут быть различные исходы, вероятности которых будут равны

$$P_{10,10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}, \qquad P_{9,10} = C_{10}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10}{1024},$$

$$P_{8,10} = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{45}{1024} \text{ и т. д.}$$

Наиболее вероятное количество выпадений различных исходов равно соответствующей вероятности, умноженной на количество испытаний, т. е. наиболее вероятное число выпадений 10 гербов и 0 решеток будет $P_{10,\,10} \cdot 1024 = 1$, а 9 гербов и 1 решетки равно 10, и т. д. Сравним теперь количество наиболее вероятных выпадений различных исходов при 1024 бросаниях 10 монет (m) и количество исходов, полученных Джевонсом:

	m	I серия Джевонса	II серия Джевонса		m	I серия Джевонса	II серия Джевонса
(10,0)[1]	1	3	1	(4,6)	210	210	197
(9,1)	10	12	23	(3,7)	120	111	119
(8,2)	45	57	73	(2,8)	45	52	50
(7,3)	120	129	123	(1,9)	10	12	15
(6,4)	210	181	190	(0,10)	1	0	1
(5,5)	252	257	232				

[1] (k, l) означает — k гербов и l решеток.

Здесь мы видим достаточно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных данных.

Кетле в 1846 г. опубликовал результаты своих опытов с шарами. Он вынимал 4096 раз с возвращением шар из урны, содержащей 20 белых и 20 черных шаров. 2066 раз он вынул белый шар и 2030 — черный, что дает частоты 0,504 и 0,496.

В 1912 г. Романовский произвел такой опыт: он бросал 4 монеты 20 160 раз. При бросании 4 монет вероятности различных исходов равны

$$P_{4,4}=\frac{1}{16},\quad P_{3,4}=\frac{4}{16},\quad P_{2,4}=\frac{6}{16},\quad P_{1,4}=\frac{4}{16},\quad P_{0,4}=\frac{1}{16},$$

а наиболее вероятное количество исходов при 20 160 испытаниях соответственно будет

$$\frac{20160}{16}=1260,\quad \frac{4\cdot 20160}{16}=5040,\quad \frac{6\cdot 20160}{16}=7560, 5040, 1260.$$

Романовский же получил для этих исходов следующие числа: 1181, 4909, 7583, 5085, 1402. Или, другими словами, вычисленные вероятности равны: 0,0625; 0,2500; 0,3750; 0,2500; 0,0625; а частоты, полученные Романовским, будут: 0,0586; 0,2435; 0,3761; 0,2522; 0,0695. Опять мы видим хорошее соответствие. Аналогичные эксперименты проводились и другими учеными. Следует иметь в виду, что результаты всех этих экспериментов представляют интерес в своей совокупности, так как каждый из них по отдельности ничего не решал.

Современники Я. Бернулли понимали его закон больших чисел как теорему, позволившую обосновать проводившиеся в то время вероятностные расчеты в демографии. Тем самым теория вероятностей получила широкое поле приложений.

Заканчивается работа высказыванием, которое в дальнейшем было принято многими, в том числе и Лапласом, как основное положение детерминизма. Я. Бернулли считает, что из доказанной теоремы «вытекает то удивительное, по-видимому, следствие, что, если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность (причем вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность), то было бы замечено, что все в мире управляется точными отношениями и постоянным законом изменения, так что даже в вещах, в высшей степени случайных, мы принуждены были бы признать как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок» [Бернулли Я., 1913, с. 40].

На этом «Искусство предположений» обрывается. Возникает вопрос: почему последняя глава осталась неоконченной? Я. Бернулли обещал применить теорию вероятностей к гражданским, экономическим и нравственным вопросам, о чем он пишет в названии четвертой части («Применение предыдущего учения к граж-

данским, моральным и экономическим вопросам») и о чем говорил Н. Бернулли в предисловии к книге. Но Я. Бернулли этого не сделал, и книга «Искусство предположений» осталась неоконченной. Можно предположить, что работа была не завершена потому, что Я. Бернулли не видел серьезных применений теории вероятностей к упомянутым вопросам. Поэтому нужно считать недоразумением утверждения такого вида: «Иаков Бернулли первый в Ars conjectandi решился приложить теорию вероятностей к событиям нравственным и политическим» [Зернов, 1843, с. 5].

Работа Я. Бернулли всегда оценивалась очень высоко. В 1913 г. к 200-летию первого издания «Искусства предположений» в России была переведена и издана (под ред. академика А. А. Маркова) четвертая часть книги [Бернулли Я., 1913]. В предисловии к этому переводу Марков писал, что в этой работе «впервые была опубликована и доказана знаменитая его теорема, положившая начало *закону больших чисел* ... Свою теорему Я. Бернулли высказал точно и доказал с полной строгостью» [Там же, с. V]. В том же году работе Я. Бернулли было посвящено заседание Петербургской академии наук, на котором с докладами выступили А. А. Марков, А. В. Васильев и А. И. Чупров. В 1914 г. Бобынин посвятил Я. Бернулли статью [Бобынин, 1914]. А. Н. Колмогоров писал, что Я. Бернулли «свою предельную теорему доказал с исчерпывающей арифметической строгостью» [Колмогоров, 1956, с. 56].

Но встречаются и отрицательные оценки работы Я. Бернулли. В частности, Пирсон говорит, что для подсчета суммы членов биномиального ряда Я. Бернулли применил весьма грубый метод неравенств, поэтому он получил преувеличенные значения необходимого числа опытов и практически его решение довольно плохое. Пирсон считает, что значение «Искусства предположений» сильно преувеличено.

Мнение Пирсона, с которым согласились и некоторые другие последователи, в корне неверно. Основная заслуга Я. Бернулли состоит не в практической пригодности его оценки, а в доказательстве самого существования такой оценки. Значение закона больших чисел Я. Бернулли для всего хода развития теории вероятностей было громадным.

И в наше время встречаются случаи, когда Я. Бернулли приписывают мысли, ему не свойственные, искажая тем самым содержание его книги. Так, один автор пишет, что Я. Бернулли выдвинул принцип недостаточного основания, который состоит в следующем: «Если нет никакого основания предпочесть одну возможность другой, тогда все они являются равновероятными» [Рузавин, 1967, с. 109]. Это утверждение (которое автор, естественно, приводит без ссылки) противоречит взглядам Я. Бернулли на вероятность, и, конечно, его нет в работе Я. Бернулли.

Работа Я. Бернулли «Искусство предположений» явилась началом нового этапа в развитии теории вероятностей, исследований,

связанных с предельными теоремами, которые занимали центральное место в теории вероятностей на протяжении длительного периода. Кроме того, эта работа ознаменовала новый подход к вероятности, которую теперь стали тесно связывать с частотой. Более того, саму теорему Я. Бернулли стали рассматривать если не как определение вероятности, то как выражение одного из основных ее свойств. Ни в работе Я. Бернулли, ни в последующих за ней работах понятию вероятности не стремились дать какое-нибудь строгое определение.

В это время вероятность еще окончательно не выделилась в такое понятие, которое стало бы объектом исследования. Это слово употребляли в разных сочетаниях, не придерживаясь строгих определений. Но следует отметить, что в книге Я. Бернулли впервые понятию вероятности отведено довольно много внимания. Установленная связь вероятности с частотой и статистический подход к вероятности оказали существенное влияние на дальнейшие вероятностные исследования и изучение самого понятия вероятности.

Книга Я. Бернулли отчетливо делится на два раздела, которые фактически почти не связаны друг с другом. В один раздел входят три первые части. Несмотря на те крупные результаты, которые Я. Бернулли достиг в этих частях, они относятся к традиционной тематике, сложившейся к тому времени в теории вероятностей. Три первые части написаны в духе идей Гюйгенса и непосредственно под его влиянием. Мы их можем отнести даже к предшествующему периоду развития теории вероятностей — его завершению.

Второй раздел — это четвертая часть. В ней Я. Бернулли рвет с традиционной тематикой, рассматривает предельную теорему, тем самым намечая пути дальнейшего развития науки. Он выделяет вероятность как основное понятие науки теории вероятностей.

По-видимому, книга Я. Бернулли создавалась не в один прием. Вначале были написаны три части, затем наступил длительный перерыв, в течение которого Я. Бернулли значительно перерос то, что было написано. Только после этого была создана четвертая часть. Этим можно объяснить длительный срок писания книги (примерно 20 лет), о чем говорит сам Я. Бернулли.

Книгой Я. Бернулли (ее четвертой частью) начинается новый этап как в развитии теории вероятностей, так и в подходе к понятию вероятности.

3. Вероятность в трудах ученых первой половины XVIII в.

Начало XVIII в. было ознаменовано в теории вероятностей не только появлением работы Я. Бернулли. Выходят в свет работы Монмора, Муавра и других ученых.

П. Р. Монмор (1687—1719) — французский метематик, его основная работа по теории вероятностей — «Анализ азартных игр». Книга имела два издания: первое — 1708 г., второе — 1713 г. (или 1714). Второе издание значительно больше по объему, чем первое; в него, кроме того, включена переписка Монмора с Н. Бернулли и одно письмо И. Бернулли.

Работа Монмора [Montmort, 1713] состоит из четырех частей. Первая часть посвящена комбинаторике, во второй рассматриваются различные игры в карты, в третьей — игры в кости, четвертая часть содержит решение различных задач, включая пять задач Гюйгенса; затем следует переписка. В предисловии Монмор кратко излагает план построения работы Я. Бернулли, который ему был известен из сообщений Фонтенеля (в «Истории Академии» за 1705 г.) и Сорена (в «Журнале ученых Франции» за 1706 г.). Монмор думал, что после смерти Бернулли работа последнего не будет опубликована. Он писал: «Я пришел к выводу, что можно пойти очень далеко в этой неисследованной области и открыть большое число истин, одинаково любопытных и новых. Это привело меня к решению глубоко разработать этот вопрос и этим в некоторой степени утешить публику в той потере, которую она ощутила, лишившись выдающейся работы г. Бернулли» [Там же, с. *ij*].

В предисловии Монмор пишет о том, что математика проникла в естественные науки, и прежде всего в физику, где она достигла очень больших успехов. «Какой бы славой было для этой науки, если бы она могла служить, сверх того, для определения суждений и поведения людей в практической жизни». Далее он говорит, что такую попытку сделал Я. Бернулли, но «преждевременная смерть не позволила ему закончить эту работу» [Там же].

Монмор видит одно из основных приложений теории вероятностей в «определении суждений и поведения людей в практической жизни». Ввиду того что понятие вероятности не было строго определено, оставалось неясным, к каким вопросам поведения Монмор предполагал применять теорию вероятностей.

Монмору было довольно мало известно о книге Я. Бернулли: «Бернулли разделил ее на четыре части. В первых трех он дает решение различных задач на азартные игры. Там должно было находиться много нового о бесконечных рядах, сочетаниях и перестановках вместе с решением задач, предложенных математиком Гюйгенсом уже довольно давно. В четвертой части он применял методы, изложенные в первых трех частях, к решению различных гражданских, нравственных и политических вопросов. Нам неизвестно, каковы те игры, раздел ставок которых определял этот автор, какие вопросы морали и политики он собирался разъяснить, но, как бы ни был удивителен этот проект, есть все основания полагать, что этот ученый автор великолепно выполнил бы его... Я убежден, что он выполнил бы все, что обещало заглавие его книги» [Там же, с. *iv*].

Следует подчеркнуть, что Монмор отказался показать приме-

нение теории вероятностей к моральным, нравственным, экономическим и другим подобным вопросам. Он пишет: «Если бы я предполагал во всем следовать Бернулли, то я должен был бы прибавить часть, где я применил бы методы, изложенные в первых частях, к политическим, нравственным и экономическим вопросам. Мне помешало выполнить это то затруднение, которое я встретил, когда попытался сделать предположения, основанные на известных фактах, которые могли бы руководить мной и поддерживать меня в моих исследованиях. Не будучи в состоянии удовлетворить это требование полностью, я решил, что лучше отложить эту работу до другого времени или предоставить славу ее свершения другому, более, чем я, искусному лицу, чем говорить вещи или слишком общеизвестные, или недостаточно точные, которые совершенно не отвечали бы ожиданиям читателя и великолепию вопроса» [Там же, с. *vj*].

Итак, Монмор, так же как и Я. Бернулли, не находит обоснованных применений вероятностных соображений к нравственным наукам. Следует отметить, что, обсуждая общие методологические вопросы, Монмор стоит на точке зрения метафизического детерминизма.

Далее в предисловии Монмор рассуждает о том, что учение о случае может применяться к поведению человека, но эти рассуждения носят очень общий и неопределенный характер. Монмор ссылается на работы Галлея, Петти, Гюйгенса, на переписку Паскаля и Ферма. В конце предисловия он пишет: «В этом трактате я в первую очередь имел в виду удовольствие математиков, а не пользу игроков, по нашему мнению, те, кто теряют на игры время, вполне заслуживают терять в них свои деньги» [Там же, с. *xxiv*].

Первая часть книги называется «Трактат о сочетаниях». В этой части Монмор рассматривает арифметический треугольник, математическое ожидание и другой материал. Биномиальная теорема рассматривается для случая $(a + b)^4$. Далее решается много задач, которые по своей тематике и содержанию, как правило, не были оригинальны, они во многом сходны с имеющимися в книге Я. Бернулли. Вторая и третья части посвящены азартным играм. Среди различных задач из тематики азартных игр в третьей части рассматриваются и задачи на раздел ставки.

Монмор прежде всего решает следующую задачу. До выигрыша всей ставки Пьеру недостает одной партии, а Полю и Жаку — по две. Как справедливо разделить ставку?

Для ответа на этот вопрос Монмор составляет табличку, аналогичную табличкам Ферма, и находит, что ставку нужно делать в отношении 17 : 5 : 5. Эта задача рассматривалась ранее и в переписке Паскаля и Ферма. После этого приводится общее правило для решения таких задач, которое иллюстрируется рядом примеров: Пьеру недостает одной, Полю — двух и Жаку — трех партий; Пьеру недостает 5, а Полю 6 партий и т. п.

В исторических отступлениях Монмор кратко касается работ Кардано, Лейбница и др.

Четвертая часть содержит решение различных задач, и в частности пяти задач Гюйгенса. Здесь же имеется задача о продолжительности игры, которая состоит в следующем: как долго будет продолжаться игра до полного разорения одного из игроков, если один игрок имеет n монет, а второй — m, в каждой партии ставка состоит по одной монете от каждого игрока и вероятность выигрыша каждой партии равна для игроков? В связи с этими задачами Монмор довольно подробно останавливается на переписке Паскаля и Ферма, приводя, в частности, полный текст письма Паскаля от 24. VIII 1654 г. [Там же, с. 233—241]. В конце Монмор предлагает четыре задачи на определение вероятностей различных исходов в некоторых карточных играх (тринадцать, фéрма и др.).

Далее идет переписка Монмора с И. и Н. Бернулли. В письме от 9.IX 1713 г. [Там же, с. 401—402] Н. Бернулли предложил Монмору следующую задачу. Два игрока A и B играют в герб и решетку на следующих условиях: игра продолжается до тех пор, пока не выпадет герб, и игрок B платит 2 монеты игроку A, если герб выпадет при первом бросании; 4 монеты, если при втором; 8 — если при третьем и т. д. Спрашивается, сколько игрок A должен заплатить B перед началом игры, чтобы игра была безобидной.

Для безобидности игры нужно, чтобы A заплатил B количество монет, равное математическому ожиданию выигрыша, которое равно $2\cdot(1/2) + 4\cdot(1/4) + 8\cdot(1/8) + \ldots + 2^n\cdot(1/2^n) = n$, где n ничем не ограничено.

Следовательно, математическое ожидание выигрыша стремится к ∞ и A должен заплатить B до начала игры бесконечно много монет, что явно бессмысленно.

Этой задачей занимался Д. Бернулли, поместивший свое исследование, специально посвященное этой задаче («Опыт новой теории о мере случая»), в трудах Петербургской академии наук [Бернулли Д., 1738]. После этой публикации задача приобрела широкую популярность и получила название петербургской задачи или петербургского парадокса. В дальнейшем этой задачей занимались многие, при ее решении вырабатывались методы и приемы, которые оказывали влияние на выработку общих подходов к вероятностным вопросам, в том числе и к вероятности.

В целом книга Монмора была написана в духе идей Гюйгенса. Книга Гюйгенса еще должна была отстаивать право для теории вероятностей как особого раздела математики. Основная заслуга книги Монмора состоит в том, что она довольно фундаментально излагает установившийся к тому времени материал новой научной дисциплины, в частности в ней Монмор довольно свободно оперирует такими понятиями, как вероятность и математическое ожидание. Такой же характер носят и три первые части книги

Я. Бернулли. Такое изложение материала и осмысление его было необходимо для дальнейшего движения науки вперед.

В книге Монмора, конечно, были некоторые задачи и вопросы, которые имели существенное самостоятельное значение (таких вопросов в трех частях книги Я. Бернулли было значительно больше). В первую очередь это относится к петербургской задаче и к задаче о продолжительности игры.

Книга Монмора привлекла к себе внимание математиков сразу же после выхода. Ее обсуждали, она вызвала хвалебные отклики и критические замечания.

Существенное значение в развитии теории вероятностей и взглядов на вероятность имели работы А. де Муавра (1667—1754). По религиозным причинам он вынужден был покинуть свою родину, Францию, и переехать в Англию, где был избран членом Королевского общества. Муавр пользовался благожелательным отношением и уважением Ньютона. «В длинном списке лиц, облагороженных гением ... и нашедших убежище в Англии, трудно назвать кого-либо, кто бы принес больше чести своей новой родине, чем Муавр» [Todhunter, 1865, с. 135—136].

Наиболее значительными работами Муавра по теории вероятностей являются «Доктрина шансов», вышедшая в 1718 г., второе издание — в 1738 г., третье — в 1756 г. [Moivre, 1756], статья «О мере случая» (1711) [Moivre, 1711] и «Аналитические этюды» (1730)]Moivre, 1730] с двумя дополнениями (второе дополнение называется «Метод аппроксимирования»).

В работе «Доктрина шансов» Муавр рассматривает много различных вопросов. Так, он исследует задачу о продолжительности игры, к которой обращается неоднократно [Moivre, 1711, с. 227; Moivre, 1756, с. 52][1], занимается исследованием вопросов, связанных с теоремой Я. Бернулли, решает ряд других задач. В частности, он исследует таблицы смертности.

По-видимому, первую попытку создать таблицы смертности предпринял Ян де Витт (1625—1672), фактический правитель Голландии. Эти таблицы он составил в 1671 г. и приложил к объяснительной записке «Стоимость пожизненных рент», представленной Генеральным штатам Голландии. Это была одна из первых работ по применению теории вероятностей к теории ренты.

В 1693 г. Э. Галлей (1656—1742) издал в Лондоне две работы: «Оценка степеней смертности человечества, выведенная на основании любопытных таблиц рождения и погребения города Бреславля с попыткой установить цену пожизненных рент» и «Несколько дальнейших замечаний по поводу Бреславльских бюллетеней смертности». В основу этих работ положены списки рождений и погребений в г. Бреславле за период 1687—1691 гг. Э. Галлей составил таблицу смертности, в которой указывалось число умер-

[1] Историю задачи о продолжительности игры, а также связь этой задачи с более поздними работами см. [Thatcher, 1957].

ших по возрастам; точнее, он составил таблицу одновременно живущих людей по возрастным группам для стационарного населения. На основании этой таблицы он находит количество населения Бреславля и решает ряд других вопросов. Галлей перечисляет возможные применения таблиц смертности. Он считает, что они необходимы для определения в современной терминологии вероятности смерти в определенный срок и дожития до определенного срока для любого возраста, для определения вероятной продолжительности жизни в любом возрасте; для вычисления величины страховой премии при страховании жизни; для определения истинной цены пожизненной ренты и для решения других вопросов. Эти работы Галлея долгие годы служили обоснованием страховым обществам, в частности они легли в основу работы вдовьей и сиротской касс, учрежденных в Лондоне в 1699 г.

Изучая таблицы смертности, составленные Галлеем, Муавр в конце книги [Moivre, 1756] предложил простое уравнение для закона смертности для людей возраста от 22 до 86 лет (предел долголетия). Это уравнение прямой линии: $y = 86 - x$, где x — возраст между 22 и 86 годами; y — число людей, достигающих x лет. Нужно отметить, что эта формула была первой интерполяционной формулой закона смертности (см. [Граве, 1912]).

В «Методе аппроксимирования» Муавр решает ряд вероятностных задач. Для того чтобы представить, какие это задачи, приведем условие одной из них: шансы выиграть одну партию у игроков A и B относятся как $a : b$; игроки обещают зрителю s, что после четного числа партии n победитель отдает ему столько ставок, сколько партий он выиграет сверх $n/2$ партий; требуется узнать ожидание зрителя S.

После решения этой и подобных задач Муавр говорит о том, что отношение вероятностей появления и непоявления события в единичном испытании будет близко отношению числа его появления и непоявления при большом числе испытаний, и притом тем ближе, чем больше число испытаний. Но, замечает Муавр, при большом числе испытаний могут происходить отклонения, и довольно большие.

Другими словами, из теоремы Я. Бернулли не следует, что m/n обязательно будет сближаться с p при увеличении n. Число появлений события, т. е. число m, зависит от случая, и поэтому возможны, хотя и маловероятны, значительные отклонения m/n от p и при больших n.

Исследование этого вопроса, который Муавр считал труднейшим, привело его к доказательству предельной теоремы. Муавр исследовал вопрос о том, с какими вероятностями отклонения m/n от p могут принимать те или иные значения. Муавр нашел частное решение для случая $p = q = {}^1/_2$, т. е. он нашел для $p = {}^1/_2$, с какими вероятностями $\left|\frac{m}{n} - p\right| = \left|\frac{2m - n}{2n}\right|$ принимает различные значения.

Позже Лаплас распространил результаты Муавра на любое p, не равное 0 и 1. Эти утверждения известны как локальная и интегральная теорема Лапласа, иногда их называют теоремами Муавра — Лапласа.

Муавр в случае интегральной теоремы доказал, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leqslant \frac{2m-n}{\sqrt{n}} \leqslant b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

При этом он понимал значение $\sqrt{n}$ как меру точности наблюдений.

При больших n пользоваться формулой Я. Бернулли для подсчета вероятностей того, что при n испытаниях ожидаемое событие появится ровно m раз $(P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m})$, практически невозможно.

Локальная теорема, доказанная Муавром, дает асимптотическую формулу для подсчета $P_{m,n}$. Муавр доказал, что

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,\,n} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2m-n}{\sqrt{n}}\right)^2}.$$

При выводе своих теорем Муавр широко использовал разложение функций в степенные ряды, а также так называемую формулу Стирлинга для $n!$, которую он получил самостоятельно. Муавр отмечал, что его формулы дают хорошие результаты при $n = 900$ и даже при $n = 100$. Он проверял свои формулы для различных, довольно больших n.

Муавр рассматривал свои результаты как непосредственное развитие закона больших чисел Я. Бернулли. У Муавра имеется четкая формулировка так называемой обратной задачи: определение вероятности по уже наблюдавшимся результатам.

Интегральная теорема Муавра явилась после закона больших чисел Я. Бернулли второй основной предельной теоремой теории вероятностей. Тодхантер замечает, что теория вероятностей была обязана Муавру более чем кому бы то ни было, за исключением Лапласа [Todhunter, 1865, § 336].

Ни Я. Бернулли, ни Муавр не стремились дать определение вероятности, хотя Муавр утверждал, что вероятности как таковые могут быть объектом исследования. Когда Муавр (или Я. Бернулли) начал рассуждать о вероятности, ясности в этих рассуждениях не было. Наряду с вероятностями Муавр рассматривал шансы и их оценку, пытаясь провести грань между этими понятиями. Основной заслугой как Я. Бернулли, так и Муавра в выяснении понятия вероятности является создание теорем, в которых вскрыты важнейшие свойства понятия вероятности.

На формирование понятия вероятности оказывали влияние многие стороны человеческой деятельности. Мы кратко отметим только наиболее значительные работы, имеющие отношение к интересующей нас теме.

В 1712 г. была опубликована статья Д. Арбутнота (1667—1735) «Довод в пользу божественного провидения, взятый из постоянной закономерности, наблюдаемой в рождении (младенцев) обоих полов» [Arbuthnot, 1712]. Заметив, что 82 года подряд в Лондоне рождалось больше мальчиков, чем девочек, Арбутнот заявил, что этот факт не может соответствовать равной вероятности рождений обоих полов, а потому выражал волю провидения, заботящегося о постоянном преобладании рождений мальчиков, так как им предстоит в жизни перенести больше опасностей. Аналогичные рассуждения после Арбутнота проводили многие исследователи.

Несмотря на нелепость вывода («воля провидения»), мы здесь имеем одну из первых проверок статистической гипотезы того, что вероятность рождения мальчика равна $^1/_2$, т. е. здесь опытно проверялась гипотетическая вероятность.

В 1741 г. вышла работа И. П. Зюсмильха (1707—1767) «Божественный порядок в изменениях рода человеческого, доказываемый рождениями, смертью и размножением». Хотя основная задача этой работы — доказать божественную мудрость, она относится к статистике народонаселения. Зюсмильх в ней говорит об отношении числа умирающих к числу живущих и о различии этого отношения в деревнях и городах; об отношении числа вступающих в брак к числу жителей; об отношении числа родившихся к числу семей и числу умерших и т. п. Он решает задачу о времени удвоения населения; вычисляет количество жителей в больших городах, в некоторых государствах и на всем земном шаре. Зюсмильх рассматривает лондонские бюллетени смертности и делает ряд выводов о порядке умирания по возрастам, от различных болезней и т. п.

Интересно отметить, что одна из работ Зюсмильха «Об умножении и периоде удвоения человеческого рода» была написана при некотором участии Эйлера, которого Зюсмильх называл «высокочтимым другом».

Работа Зюсмильха при всей ее теологической направленности за счет использования и обобщения демографических материалов имела некоторое значение в развитии взглядов на вероятность.

Основы теории ошибок, элементы которой были сформулированы еще Галилеем, были заложены работами Р. Коутса, а в особенности Т. Симпсона и И. Ламберта. Теория ошибок, применяя вероятностные методы оценок, влияла на их совершенствование и на формирование понятия вероятности. В дальнейшем мы неоднократно будем касаться отдельных вопросов теории ошибок, хотя последовательного изложения ее развития и результатов мы делать не будем.

4. Моральное ожидание

В середине и во второй половине XVIII в. многие ученые занимались вопросами, связанными с вероятностью. Прежде всего это относится к математикам, из которых в первую очередь следует отметить Д. Бернулли (1700—1782).

Наиболее известной работой Д. Бернулли по теории вероятностей является «Опыт новой теории меры случая» [Bernoulli D., 1738] (нем. перев. [Bernoulli D., 1896]), в которой он вводит понятие морального ожидания [1].

Непосредственной целью этой работы было решение петербургского парадокса, который получил такое название благодаря именно этой публикации.

Вначале Д. Бернулли вводит правило подсчета математического ожидания, которое он называет основным правилом: «Значение ожидаемой величины получается путем умножения значений отдельных ожидаемых величин на число случаев, в которых они могут появиться, и последующего деления суммы произведений на сумму всех случаев, при этом требуется, чтобы рассматривались те случаи, которые являются равновозможными между собой» (§ 1). Это правило полностью соответствует определению математического ожидания (м. о. $x = \Sigma x_i p_i$).

Д. Бернулли считает, что основное правило (вычисление математического ожидания) базируется на следующих соображениях: «Так как нет никакого основания представлять одному ожидающему больше, чем другому, то следует признать за каждым из них в отдельности право на одинаковую долю, при этом не принимаются во внимание никакие соображения, учитывающие положение отдельных лиц, оцениваются же тщательно только соображения, имеющие отношение к условиям вероятности» [Там же]. Д. Бернулли считает такие рассуждения несправедливыми; для доказательства своей точки зрения он приводит много примеров. Один из них такой. Пусть случилось так, что совершенно неимущий может с равной вероятностью либо ничего не получить, либо получить 20 тыс. дукатов. Нарушит ли он свои интересы, продав свой шанс не за 10 тыс., а за 9 тыс. дукатов? Д. Бернулли считает, так поступить совершенно неимущему разумно; очень же богатый человек нарушил бы при таком решении свои интересы. Из этого Д. Бернулли делает вывод: «Очевидно, невозможно рекомендовать всем людям мерить шанс одной и той же мерою, а следовательно, нельзя применять и правило § 1» (§ 3), т. е. нельзя применять математическое ожидание.

Прежде чем дать правило подсчета нового ожидания, которое бы устраняло, по мнению Д. Бернулли, недостатки математического ожидания, он предлагает говорить о «выгоде», а не о «цене».

---

[1] Термина «моральное ожидание» у Д. Бернулли не было, его ввел Г. Крамер (1704—1752) при решении петербургского парадокса.

«Ценность должна быть определена не по цене вещи, а по той выгоде, которую каждый извлек бы из нее. Цена определяется по вещи и является одинаковой для всех, выгода же зависит от личных условий. Так, несомненно, что получение 1000 дукатов имеет большее значение для бедняка, чем для богатого, хотя цена их для каждого является одинаковой» (§ 3).

Пусть состояние некоторого гражданина увеличивается довольно малыми приращениями. В этом случае «каждый маленький выигрыш всегда приносит выгоду, обратно пропорциональную общему итогу богатства» (§ 5). Далее идет рассуждение,что следует понимать под «итогом богатства». В это понятие, по Д. Бернулли, входит все, что обеспечивает существование человека, в первую очередь возможность заниматься каким-нибудь промыслом, даже нищенством. «Совершенно неимущим можно было бы назвать только того, кто умирает с голоду» (§ 5).

Чувствуя шаткость своих соображений, Д. Бернулли снова и снова обращается к различным примерам, которые должны убедить читателя в справедливости его рассуждений. Последний пример состоит в следующем: пусть «состояние одного оценивается в 100 тыс. дукатов, а состояние другого в столько же полудукатов, если первый получает 5 тыс. дукатов годового дохода, то второй соответственно столько же полудукатов; очевидно, что со всех точек зрения для первого дукат имеет такое же значение, как для второго полудукат, и что выигрыш одного дуката для первого имеет не большее значение, чем для второго выигрыш полудуката. Если, следовательно, они оба выигрывают по одному дукату, то второй получит от этого двойную выгоду, выиграв тем самым два полудуката; так как этот пример является типичным для всех случаев, то я считаю излишним приводить другие» (§ 6).

Таким образом, по Д. Бернулли, моральное значение выигрыша, кроме величины выигрыша и его вероятности, зависит также от имущественного положения игрока.

Далее вводится понятие морального значения перехода капитала α в капитал x. Эта величина определяется формулой $y = b \ln (x/\alpha)$, где коэффициент $b > 0$. Или в дифференциальной форме

$$dy = b \frac{dx}{x}$$

(в дальнейшем он рассматривает логарифм по основанию a) [Bernoulli D., 1896, с. 35], откуда видно, что бесконечно малое приращение морального значения перехода прямо пропорционально бесконечно малому приращению капитала и обратно пропорционально величине капитала x, который получает приращение dx. Этим рассуждением Д. Бернулли впервые применил в теории вероятностей дифференциальное уравнение.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — возможные значения выигрыша и $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — соответствующие вероятности. Среднее моральное

значение выигрыша определяется формулой

$$z = p_1 b \log \frac{c_1+\alpha}{\alpha} + p_2 b \log \frac{c_2+\alpha}{\alpha} + \ldots + p_m b \log \frac{c_m+\alpha}{\alpha}.$$

Это есть математическое ожидание величины $b \log (x+\alpha)/\alpha$, где x — выигрыш и α — капитал выигрывающего. Определим из уравнения $z = b \log (x/\alpha)$ $x = \alpha a^{z/b}$. Подставим сюда значение z из полученной выше формулы:

$$x = \alpha a^{p_1 \log \frac{c_1+\alpha}{\alpha} + p_2 \log \frac{c_2+\alpha}{\alpha} + \ldots + p_m \log \frac{c_m+\alpha}{\alpha}};$$

$$x = \alpha \left(\frac{c_1+\alpha}{\alpha}\right)^{p_1} \left(\frac{c_2+\alpha}{\alpha}\right)^{p_2} \ldots \left(\frac{c_m+\alpha}{\alpha}\right)^{p_m} =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^{p_1}\alpha^{p_2} \ldots \alpha^{p_m}} (c_1+\alpha)^{p_1} (c_2+\alpha)^{p_2} \ldots (c_m+\alpha)^{p_m} =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^{p_1+p_2+\ldots+p_m}} (c_1+\alpha)^{p_1} (c_2+\alpha)^{p_2} \ldots (c_m+\alpha)^{p_m}.$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, окончательно получим

$$x = (c_1+\alpha)^{p_1} (c_2+\alpha)^{p_2} \ldots (c_m+\alpha)^{p_m}.$$

Разность $(c_1+\alpha)^{p_1} (c_2+\alpha)^{p_2} \ldots (c_m+\alpha)^{p_m} - \alpha$, по Д. Бернулли, и представляет собой величину морального ожидания выигрыша при основном капитале α.

Запишем это выражение в виде

$$\alpha \left(1+\frac{c_1}{\alpha}\right)^{p_1} \left(1+\frac{c_2}{\alpha}\right)^{p_2} \ldots \left(1+\frac{c_m}{\alpha}\right)^{p_m} - \alpha.$$

Разлагая выражение по биному Ньютона и считая α большим, отбрасываем члены, у которых α содержится в знаменателе, мы получим выражение математического ожидания.

Структура морального ожидания напоминает структуру важнейшего понятия современной теории информации — энтропии опыта с вероятностями исходов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, равной $H = -p_1 \lg p_1 - p_2 \lg p_2 - \ldots - p_n \lg p_n$, выражающей меру неопределенности этого опыта. В случае, когда одна из $p_n = 1$, а все остальные вероятности равны 0, т. е. исход опыта определен, $H = 0$; в случае максимальной неопределенности, когда все $p_n = 1/n$, H принимает максимальное значение, равное $\lg n$.

Понятие морального ожидания Д. Бернулли применил к петербургской задаче (см. [Бернулли Д., 1959, с. 462—463]).

Как мы уже знаем, парадокс этой задачи состоит в том, что математическое ожидание искомого выигрыша равно бесконечности.

Если же применить вместо математического ожидания моральное ожидание, введенное Д. Бернулли, то получается конечная величина.

Пусть α — капитал, которым владел A до начала игры. Тогда для морального ожидания получаем выражение

$$(\alpha + 1)^{1/2}(\alpha + 2)^{1/4}(\alpha + 4)^{1/8} \ldots - \alpha = P(\alpha) - \alpha.$$

«При $\alpha = 0$ разность $P(\alpha) - \alpha$ равна 2, при $\alpha = 10$ примерно 3, при $\alpha = 100$ — около $4\ {}^1/_3$, при $\alpha = 1000$ — около 6» [Смирнов, 1959, с. 463].

Сумма x, за которую можно купить положение A, имея капитал α, определяется из равенства $P(\alpha - x) - \alpha = 0$.

В этой работе Д. Бернулли рассматривает другую задачу [Bernoulli D., 1896, с. 44—45]. Семпроний имеет 4000 дукатов наличными и на 8000 дукатов товаров, находящихся в далеких странах; эти товары предстоит перевезти. Предполагается, что из 10 кораблей, на которых перевозится товар, один тонет. Как выгоднее перевозить товар? Предположим, все товары перевозятся на одном корабле. Тогда моральное ожидание прибыли от привозимых товаров будет

$$(8000 + 4000)^{9/10} \cdot (0 + 4000)^{1/10} - 4000 = (12000)^{9/10} \cdot (4000)^{1/10} - 4000 = 6751 \text{ дукатов}.$$

Если товары перевозятся на двух кораблях, то моральное ожидание будет

$$(8000 + 4000)^{81/100}(4000 + 4000)^{18/100} \cdot (0 + 4000)^{1/100} - 4000 = (12000)^{81/100}(8000)^{18/100} \cdot (4000)^{1/100} - 4000 = 7033 \text{ дуката}.$$

Здесь 81/100 — вероятность того, что оба корабля прибудут благополучно $(9/10 \cdot 9/10 = 81/100)$; 18/100 — вероятность того, что один из двух кораблей погибнет $(9/10 \cdot 1/10 + 1/10 \cdot 9/10 = 18/100)$; 1/100 — вероятность, что оба корабля погибнут $(1/10 \cdot 1/10 = 1/100)$.

Вторая величина больше первой. Из этого Д. Бернулли делает вывод, что с увеличением числа кораблей увеличивается моральное ожидание. «Ожидание Семпрония будет возрастать по мере того, как он будет сокращать долю каждого корабля; никогда, однако, ожидание это не превысит 7200 дукатов. Об этом следует помнить» [Там же, § 16]. И как результат он записывает правило: «Благоразумнее разделить имущество, подвергающееся опасности, на много частей, чем рисковать им всем сразу» [Там же].

В этой же работе Д. Бернулли рассматривает и другие задачи на применение своей формулы для вычисления морального ожидания. Рассмотрим одну из этих задач. Кай, живущий в Петербурге, купил в Амстердаме товары, которые можно продать в Петербурге за 10 тыс. рублей. Он доставляет эти товары в Петербург морем, но сомневается, должен ли он прибегнуть к страхованию (поручительству) товаров. Ему известно, что из 100 судов на этом маршруте гибнет обычно около 5. Поручитель требует 800 руб. Спрашивается, каким состоянием должен обладать Кай, не считая

ожидаемых товаров, для того, чтобы он имел основания пренебречь поручительством? Применяя свои правила, Д. Бернулли получает, что Кай должен обладать состоянием в 5043 руб. «Если, следовательно, у Кая имеется, помимо ожидаемых им товаров, больше 5043 руб., то он поступит правильно, отказавшись от поручительства, если же меньше, то он поступит хорошо, согласившись на него» [Там же, § 15]. Состояние же принявшего поручительство должно быть не меньше 14 243 руб. «Тот, кто не так богат, неразумно предлагает себя в качестве поручителя, а тот, кто богаче, делает это не без основания» [Там же]. Д. Бернулли высказывается за распространение поручительства (страхования) во всех странах. Далее без выкладок Д. Бернулли пишет, что если состояние меньше 20 478 руб., то выгодно страховать за 600 руб., а если больше, то от страхования за эту сумму нужно отказаться и т. п.

«Никто, как бы он ни был богат, не может принять на себя этого поручительства за 500 рублей без ущерба для своих интересов» [Там же].

Азартные игры, в которых математическое ожидание выигрыша равно 0 (справедливая игра), с точки зрения морального ожидания оказываются невыгодными — моральное ожидание проигрыша превышает моральное ожидание выигрыша. Это является, замечает Д. Бернулли, указанием «на необходимость уклоняться от азартных игр».

Д. Бернулли писал, что он собирается построить, в последующих своих работах, общую теорию, подобно тому как до этого времени строилась и создавалась теория вероятностей. Но Д. Бернулли никаких работ в дальнейшем на эту тему не писал, хотя и сделал широковещательное обещание. Скорее всего это произошло потому, что Д. Бернулли увидел, что на введенном им понятии нравственного ожидания нельзя построить новую математическую теорию.

Более того, даже в этой работе Д. Бернулли говорит, что справедливость требует, чтобы два игрока были поставлены в равноправное положение, а это достигается только применением математического ожидания. Обращаясь же к моральному ожиданию, мы делаем некоторое преимущество менее обеспеченной стороне перед более обеспеченной.

Вопрос о моральном ожидании (нравственном ожидании) в дальнейшем рассматривался многими учеными.

Так, за введение морального ожидания выступал известный французский естествоиспытатель Ж. Л. Бюффон (1707—1788). Он считал, что его надо ввести наряду с математическим ожиданием. В своей работе «Опыт моральной арифметики» он обосновывает необходимость морального ожидания следующим рассуждением: «Скупой человек похож на математика, тот и другой ценят деньги по внутреннему их достоинству; рассудительный человек, однако, не разбирает, какова их условная ценность, а видит только вы-

годы, которые может извлечь из них. Талер, отложенный бедным для внесения законной повинности, и талер, дополняющий мешки ростовщика, в глазах скупого и математика имеют одинаковую ценность; первый присвоит себе каждый из них с равным наслаждением, второй будет считать их двумя равными единицами; между тем человек рассудительный оценит в золотую монету талер бедного и в грош талер ростовщика» (цит. по: [Граве, 1924, с. 138]).

Бюффон считал, что нравственное ожидание зависит от математического и что в общем случае его нельзя точно выразить аналитической формулой. В отдельных случаях он предлагал разные формулы для ее подсчета. Так, Бюффон рассматривает следующий пример. Два человека, имеющие равные состояния по 100 талеров, играют в кости на половину своего состояния, т. е. на 50 талеров. Выигравший увеличивает свое состояние на $^1/_3$, так как будет иметь 150 талеров, проигравший уменьшит свое состояние в два раза, так как у него останется 50 талеров. Из этого Бюффон делает вывод, что игра невыгодна для игроков по своей сущности.

Бюффон считает, что мерой нравственной выгоды является отношение рассматриваемой суммы ко всему капиталу. Пусть A — весь капитал, a — ожидаемое приращение капитала. Нравственная выгода при потере a будет a/A, а в случае приобретения $a/A + a$. Разность будет $\frac{a}{A} - \frac{a}{A+a} = \frac{a^2}{A(A+a)}$.

Моральное ожидание разрабатывали и в XIX в. Им занимался, например, В. Я. Буняковский (1804—1889), который писал, что теория вероятностей должна исследовать «умственное и нравственное» состояние страны, определить «меру общественого просвещения» и т. п. Правда, он отмечает, что эти вопросы трудные: «как отличить оттенками различные степени грамотности и высшего образования при огромном итоге учащихся или окончивших учение и потом следить за последними»? И далее: «Вопросы о нравственном состоянии страны при достаточном числе фактов и наблюдений, собирание которых, конечно, сопряжено с большими затруднениями, подлежат также, с известными ограничениями, математическому анализу» [Буняковский, 1846, с. 45].

Исходя из этих предпосылок Буняковский приходит к выводу, что теория морального ожидания поможет разрешить ряд из перечисленных вопросов. В теории морального ожидания он следует за Д. Бернулли. Он говорит о предположении Д. Бернулли о том, «что ожидаемое приращение физического имущества разложено на дифференциальные элементы», и допускает потом, «что бесконечно малое приращение нравственной выгоды, соответствующее какому ни есть элементу физического имущества, прямо пропорционально абсолютной величине этого элемента и обратно — первоначальному имуществу, увеличенному суммою всех элементов, предшествовавших тому, который принимается в соображение» [Там же, с. 87].

Следуя за Д. Бернулли, Буняковский получает основную формулу морального ожидания следующим образом. Пусть dx — бесконечно малое приращение физического имущества x; dy — бесконечно малое приращение нравственной выгоды. Тогда, по изложенному, $dy = kdx/x$, где k — const. Интегрируя, получим $y = k \ln x - \ln h$, где h определяется по начальным условиям, т. е. по известному y, соответствующему данному x. По поводу этого вывода Буняковский пишет: «Вот мера нравственной выгоды, предложенная Даниилом Бернулли и допускаемая до сих пор почти всеми математиками» [Там же, с. 87]. Следовательно, к середине XIX в. теория нравственного ожидания была общепринята, хотя Буняковский и отмечает: «Нельзя, однако, не сознаться, что формула Бернулли выведена из предположения, справедливость которого не очевидна, и потому основанные на ней доказательства, для судей строгих, могут казаться не вполне удовлетворительными» [Там же].

Буняковский за меру морального ожидания или, как он пишет, нравственной выгоды выбирает непрерывную функцию $\theta(x)$, ограниченную следующими двумя условиями:

«1) чтобы с возрастанием физического имущества x нравственная выгода $\theta(x)$ также получала приращение и

2) чтобы это приращение уменьшалось по мере увеличения физического имущества» [Там же].

Из этих условий следует, что «первая производная $\theta'(x)$ будет величина положительная, а вторая $\theta''(x)$ — величина отрицательная» [Там же].

Используя функцию $\theta(x)$, Буняковский делает выводы о том, что любые игры невыгодны даже при совершенной честности игроков, что лучше свое имущество подвергать опасности по частям, а не целиком, что всякая лотерея невыгодна для тех, которые берут билеты, даже в том редком случае, когда сбор за билеты не превышает разыгрывающихся сумм. Но чаще всего в «лотереях математическое равенство нарушается до неимоверной степени» [Там же, с. 92]. Буняковский приводит пример с французской лотереей. «Может ли что быть безнравственнее подобного учреждения? Такую лотерею по справедливости можно было назвать налогом на народное невежество» [Там же, с. 93].

19.VI.1843 г. профессор Московского университета Н. Е. Зернов (1804—1862) произнес на торжественном собрании в университете речь «Теория вероятностей с приложением преимущественно к смертности и страхованию». В том же году эта речь в значительно расширенном виде была издана отдельной книжкой [Зернов, 1843]. В этой книжке Зернов рассматривает много вопросов, в том числе он касается и морального ожидания.

Зернов высказал соображения, что кроме математического ожидания и нравственного в математике должен существовать целый набор различных гипотез такого же рода. «Возьмем в пример особу..., ожидающую с вероятностью $^1/_2$ получить 200 000 р. Матема-

тическая надежда ее будет 100 000 р., нравственная (предполагая 5000 р. капитала в ее способностях) почти на 27 020 р. Но, очевидно, мало ли обстоятельств, в которых благоразумный человек ограничится меньшею суммою, например если вся эта сумма или часть ее необходима ему, дабы упрочить участь семейства, выкупить из неволи отца, сына и т. д. Подобные условия вопросов еще не были подвергаемы исчислениям, и прилагать к ним обыкновенные формулы — значит употреблять их во зло. Напротив, богатый капиталист не ошибется, если предпримет множество спекуляций с вероятностью $^1/_2$ и заплатит за них половинную цену» [Там же, с. 27].

Вопрос о моральном ожидании рассматривался многими: Лапласом, Пуассоном, Лакруа и др. Понятие морального ожидания и связанные с ним идеи неоднократно подвергались критике. В частности, Ж. Бертран в своем курсе «Исчисление вероятностей» замечает с иронией: «Теория морального ожидания сделалась классической, и никогда это слово не может цитироваться столь удачно: эту теорию изучали, ей обучали, ее излагали в истинно знаменитых книгах. Успех на этом и окончился, ею фактически не занимались, и из нее не смогли сделать никакого употребления» [Bertrand, 1899].

Почему же моральное ожидание было понятием, которое не оказало почти никакого влияния на развитие теории вероятностей, на понятие вероятности, хотя оно внешне и касалось как будто довольно важных вероятностных вопросов?

Моральное ожидание у Д. Бернулли ($y = b \ln (x/\alpha)$), у Бюффона (a/A; $a/(A + a)$) и других не было связано с понятием вероятности. Это и предопределило судьбу морального ожидания. Понятия, которые затрагивают важные вероятностные проблемы, должны явно или неявно быть связаны с вероятностью. Если этого не происходит, то вводимые понятия оказываются бесплодными. Так произошло с моральным ожиданием. В дальнейшем в теории вероятностей мы неоднократно будем встречаться с различными попытками ввести новые понятия для того, чтобы глубже вскрыть существо исследуемого вопроса. Во всех случаях, когда это производилось без связи с вероятностью, эти понятия рано или поздно умирали, не внеся успеха в науку. Наоборот, если новое понятие опиралось на вероятность, оно помогало как разрешить ту или иную проблему, так и глубже вскрыть содержание самого понятия вероятности.

И хотя структура морального ожидания напоминает структуру энтропии опыта ($H = -\Sigma p_i \lg p_i$), эта аналогия формальная, она не приводит ни к каким выводам. В энтропии опыта понятие вероятности существенно, а этого как раз и не хватает моральному ожиданию. Связь с вероятностью обеспечила энтропии опыта столь успешные и плодотворные применения.

5. Применение анализа бесконечно малых к вероятностным задачам

Вначале при решении вероятностных задач не было никакого специального аппарата, их решали чаще всего арифметическими приемами и прибегали к обычным рассуждениям. Постепенно ведущую роль в решении таких задач стала играть комбинаторика, так как приходилось подсчитывать количество разнообразных исходов. Применение комбинаторики носило специфический вероятностный характер. На базе комбинаторики складывались первые представления в математике о вероятности. Если сюда прибавить метод решения задач при помощи математического ожидания, то охватим в целом, чем пользовались при решении вероятностных задач в конце XVII в. Но постепенно в теорию вероятностей стали проникать и другие математические приемы и методы, которые не только помогали решать вероятностные задачи, но и вскрыли ряд существенных сторон этих задач и проблем.

Я. Бернулли при доказательстве своей теоремы пользовался предельным переходом. Симпсон использовал непрерывную кривую распределения и т. п. Но основная заслуга систематического введения анализа бесконечно малых в теорию вероятностей принадлежит Д. Бернулли. Мы уже видели, что при изучении морального ожидания Д. Бернулли получил простейшее дифференциальное уравнение $dy = b\frac{dx}{x}$. Он употребляет дифференциальное исчисление в работе о пользе оспопрививания (1766). Но главной в этом отношении является его работа «Пример применения алгоритма бесконечных к искусству предположения» [Bernoulli D., 1768] [1]. Д. Бернулли в этой работе заменил довольно громоздкий аппарат комбинаторики операциями дифференциального и интегрального исчислений. Возможность такой замены он обосновывает следующим образом.

«Всякий раз, когда положение вещей изменяется путем непрерывного извлечения жребия и вследствие перемен, с ним связанных, как, например, когда из урны последовательно одна за другой извлекаются карточки, отличающиеся друг от друга различными числами, на них написанными, и когда исследуются законы, определяющие различные изменения, отсюда вытекающие,— с пользой для совершения этого дела может быть применено исчисление бесконечно малых, если только каждое изменение можно счесть как бы за бесконечно малое, а это возможно до тех пор, пока число карточек, остающихся в урне, весьма велико, ибо тогда единица может приниматься как бы за бесконечно малую; на эту же гипотезу опирается та арифметика бесконечных, которой

[1] В статье [Смирнов, 1954] дано несколько иное название этой работы на русском языке.

пользовались математики до открытия дифференциального и интегрального исчисления» [Там же, с. 90]. Д. Бернулли считает единицу бесконечно малой по сравнению с большими числами, фигурирующими в задаче. Тем самым он получает приближенные формулы, выделяющие наиболее существенные члены из точной формулы.

Для демонстрации правомочности применения анализа бесконечно малых Д. Бернулли в § 2 рассматривает следующую задачу:

Пусть в урну положены карточки попарно, причем каждая из двух парных карточек помечена одним и тем же номером; различные же пары предполагаются помеченными различными номерами, затем наудачу извлекаются из урны одна карточка за другой, спрашивается, сколько осталось в урне разрозненных и неразрозненных пар среди данного числа оставшихся в урне карточек?

Вначале Д. Бернулли решает эту задачу обычными в то время комбинаторными приемами и приходит к выводу, что число оставшихся пар (x) после ($2n - r$)-го извлечения, где n — первоначальное количество пар в урне, а r — количество оставшихся в урне карточек, будет $x = \frac{r(r-1)}{4n-2}$. Это и есть окончательное решение задачи. Следовательно, в этой задаче Д. Бернулли находит математическое ожидание числа оставшихся пар после ($2n - r$)-го извлечения.

После этого для иллюстрации приводится следующий пример, Перемешиваются две колоды карт по 52 карты. Получаем 52 пары карт, общее же число карт $2n = 104$. Извлекается случайным образом 13 карт, остается 91 карта ($r = 91$). По нашей формуле получаем

$$x = \frac{r(r-1)}{4n-2} = \frac{91 \cdot 90}{208-2} = 39\frac{78}{103}.$$

Следовательно, сначала оказываются разрозненными почти столько же пар, сколько карт извлекается. При извлечении 52 карт получаем

$$x = \frac{52 \cdot 51}{208-2} = 12\frac{90}{103}.$$

В конце § 4 Д. Бернулли делает общее замечание: «Совершенно бесспорно, что в наше время благороднейшее учение об искусстве делать предположения находится в пренебрежении или недооценивается.

А между тем оно помогает разрешать весьма многие вопросы из области морали или политики, извлекать максимальную пользу из человеческих поступков и предусмотрительно их направлять» [Там же, § 4].

Здесь следует обратить внимание на то, что Д. Бернулли указывает только на применение теории вероятностей к морали, политике и другим вопросам.

Далее Д. Бернулли, возвращаясь к решаемой задаче, говорит, что если $n \to \infty$, то и $r \to \infty$, и мы можем пренебречь единицей и двойкой в формуле $x = r(r-1)/(4n-2)$. Тогда мы получим $x = r^2/4n$.

Относительно этого последнего равенства Д. Бернулли пишет: «Я покажу метод, каким последнее уравнение $x = r \cdot r/4n$ может быть непосредственно и легко найдено с помощью исчисления бесконечно малых» [Там же]. Затем он получает из составленного простого дифференциального уравнения это равенство.

Уменьшение r на единицу (вынимание карточки) Д. Бернулли принимает за dr. Если вынутая карточка имеет тот же номер, что и одна из вынутых прежде, Бернулли, считает, что $dx = dr$, если же она не имеет такой пары, то $dx = 0$. Так как вероятность первого случая равна $2x/r$, то Бернулли считает, что $dx = \frac{2x}{r} dr$, решение которого при начальных условиях $r = 2n$ и $x = n$ будет $x = r^2/4n$.

Далее, в § 7, Д. Бернулли решает таким же методом другую задачу, которая является некоторым усложнением предыдущей. Затем он пишет, что легко получить решения, если карточек будет не две категории, а три, четыре, и т. д., и приводит окончательные формулы для этих случаев, написанные по аналогии с решением предыдущей задачи.

В конце работы рассматривается та же задача для двух категорий карточек, но дополнительно задано отношение легкости выхода черных карточек и легкости выхода белых. Работа заканчивается примером, когда это отношение равно 2.

Сам Д. Бернулли считает эту свою работу предварительной к работе «О средней продолжительности браков» [Бернулли Д., 1955]. Прежде чем перейти к решению основной задачи (установление метода нахождения средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов), Д. Бернулли делает ряд общих замечаний, в которых отмечает значение закона больших чисел для статистики, а также указывает на некоторые статистические закономерности. Он пишет: «Хотя судьба отдельного человека совершенно неизвестна, тем не менее нельзя отрицать, что при большом произвольно взятом числе предметов среднее расстояние соответствует почти неизменным законам, к чему бы это состояние ни относилось или о чем бы ни шла речь» [Там же, с. 453—454].

Д. Бернулли указывает, что отношение рождающихся мальчиков и девочек довольно постоянно даже для разных стран. Он отмечает, что «одна оспа в наши дни губит двенадцатую или тринадцатую часть каждого поколения» [Там же]. «Болезни первого детского возраста уносят в течение первого года жизни почти три десятых всего поколения» [Там же]. Он подчеркивает также, что смертность женщин меньше, чем смертность мужчин. «Средняя продолжительность жизни, взятая от самого рождения, для мальчиков 24 года и 2 месяца, а для девочек 28 лет и 10 месяцев...

Число живущих женщин неизменно превышает число живущих мужчин» [Там же].

Нахождение средней продолжительности браков было для того времени довольно сложной задачей. У Д. Бернулли, конечно, не было статистических данных о действительных браках за довольно продолжительный период, он должен был теоретически установить уменьшение первоначального количества браков в связи с постарением супругов. Д. Бернулли сперва упростил эту задачу, а затем решил ее в общем виде. Он вначале предполагает, что все вступающие в брак имеют по 20 лет и что смертность мужчин и женщин одинакова, и в этом предположении решает задачу.

После введения обозначений к этой задаче Д. Бернулли пишет: «Разрешение этого вопроса я дал в статье: „Об употреблении алгоритма бесконечно малых в теории вероятностей“, где я, правда, пользовался терминами, обычно принятыми в теории вероятностей, но всякий может видеть, что суть дела именно в этом» [Там же, с. 455]. Действительно, упрощенная задача о продолжительности браков полностью совпадает с задачей о количестве разрозненных и неразрозненных пар карточек, рассмотренной нами выше. Поэтому Д. Бернулли сразу выписывает ответ $x = (r^2 - r)/(4n - 2)$. Откуда число всех вдовствующих $r - 2x = (2nr - r^2)/(2n - 1)$, из которых половина вдовцы, а половина — вдовы.

С помощью этой формулы Д. Бернулли строит таблицу, в которой против каждого возраста (начиная с 20 лет) указано число сохранившихся браков (из исходных 1000) и количество вдовствующих. Исходные данные он взял из таблицы смертности Галлея. На основании первой построенной таблицы Д. Бернулли вычисляет другую таблицу — таблицу вероятной продолжительности браков. Затем он переходит к случаю, когда вступают в брак лица разного возраста. Д. Бернулли предполагает, что мужчины, вступающие в брак, имеют 40 лет, а женщины 20 лет. Задача решается совершенно так же, если все мужья одинакового возраста (безразлично какого) и жены тоже одинакового возраста, но отличного от возраста мужей.

Д. Бернулли ставит следующие вопросы: «Сколько между всеми этими оставшимися в живых будет сохранившихся или не тронутых смертью браков, сколько, далее, вдовцов, или по крайней мере однажды овдовевших, и сколько вдов или раз уже овдовевших женщин?» [Там же, с. 460]. Д. Бернулли пишет, что метод, с помощью которого решается поставленная задача, «с изменением только названий полностью изложил» он «в предварительном опыте „Об употреблении алгоритма бесконечно малых в теории вероятностей“. Здесь у нас мужья и жены, а там — карты, черные и белые; здесь — браки, а там — парные карты; здесь, наконец, бóльшая смертность одного из двух полов, а там — бóльшая легкость для извлечения из урны или большая наклонность к выходу из нее» [Там же].

Д. Бернулли составил таблицу, в которой указывалось количество сохранившихся браков, когда возраст супругов разный, а также в тех же условиях таблицу средней продолжительности браков и значение их вероятной продолжительности (времени, в течение которого разрушается ровно половина браков). В этой работе Д. Бернулли использовал основную литературу по демографии (работы Э. Галлея, А. Депарсье, П. Варгентина и др.). Используя идею Галлея о стационарности населения, он получает ряд интересных выводов. Оценку этой работы Д. Бернулли с точки зрения демографии см. в работе [Птуха, 1945]. В ряде других своих работ Д. Бернулли также применяет анализ бесконечно малых, причем их характерной чертой является использование дифференциальных уравнений. Так, например, он решает следующие задачи.

В одной урне находится n белых шаров, а в другой n черных. Одновременно из каждой урны в другую перекладывается один шар, эта операция производится r раз. Каково ожидаемое количество числа белых шаров в первой урне? Д. Бернулли в этой задаче, как и во всех других, не отличает количество шаров от математического ожидания этого количества.

В первой урне содержится n белых шаров, во второй n черных, и в третьей n красных шаров. Каково ожидаемое количество шаров каждого цвета в урнах после r циклических перекладок из одной урны в другую?

Решение таких задач Д. Бернулли получает при помощи комбинаторики и при помощи дифференциальных уравнений.

В середине XVIII в. эпидемии оспы уносили много жертв. По оценке Д. Бернулли, $^1/_{64}$ часть населения ежегодно. К этому времени стали практиковать прививку оспы от больного человека к здоровому (инокуляция). Д. Бернулли в работе «Опыт нового анализа смертности, вызванной оспой, и преимуществ предотвращающей ее инокуляции» (1766) решает вопрос, насколько выгодна инокуляция, так как она, спасая от оспы, сама иногда приводит к смертельному исходу. Д. Бернулли при помощи дифференциального уравнения получил формулу для подсчета относительного количества лиц, не болевших оспой. Аналогичную формулу он получил для инокулированного населения, предположив, что инокуляция исключает оспу, но с малой вероятностью приводит к смертельному исходу. Окончательный результат этой работы состоит в построении таблицы смертности инокулированного населения, для которого средний срок жизни получился больше на 3 года 2 месяца, чем у населения, не делавшего прививки.

В работе «Приложение меры случая к случайным последовательностям естественных событий» (1770) Д. Бернулли рассматривал вопрос о соотношении рождаемости мальчиков и девочек.

Бернулли вначале отыскивает математическое ожидание (M) количества мальчиков из общего числа ежегодных рождений $2N$

при относительной частоте рождений мальчиков и девочек, равной $a : b$, он получает, что $M \approx 2Na/(a + b)$.

Как мы видим, Д. Бернулли в своих работах по теории вероятностей решал, кроме чисто вероятностных задач, задачи, связанные с вопросами народонаселения и с астрономическими вопросами.

Применение предельных переходов, непрерывных распределений, дифференциальных уравнений к вероятностным вопросам — все это значительно продвинуло теорию вероятностей, поставило и решило ряд новых вопросов. При помощи анализа бесконечно малых было установлено много новых свойств вероятности, хотя никаких формальных определений этому понятию сделано не было. Наиболее важную роль в этом отношении сыграла теорема Я. Бернулли, которая выражает одно из основных свойств вероятности. Работы Д. Бернулли также сыграли существенную роль — они ввели в исследование вероятностных вопросов более мощный и более формальный математический аппарат. Тем самым были вскрыты связи вероятности, употребляемой в задачах из схемы урн, с демографическими и другими проблемами, в которые входят вероятностные понятия. В этом отношении представляет несомненный интерес работа Д. Бернулли по теории ошибок [Bernoulli D., 1923] и связанная с нею работа Л. Эйлера (1707—1783).

Д. Бернулли рассматривает распределение случайных ошибок и предлагает следующие пять принципов, которым должна удовлетворять кривая распределения случайных ошибок: 1) уклонения от истинного значения в обе стороны одинаково возможны, и плотность распределения вероятностей симметрична относительно среднего; 2) максимум плотности вероятностей достигается в истинном значении измеряемой величины, и касательная в этой точке параллельна оси абсцисс; 3) чаще и, следовательно, вероятнее встречаются малые уклонения; 4) плотность распределения вероятностей отлична от нуля только в конечном интервале; 5) плотность распределения столь стремительно приближается к нулю, что в граничных точках отрезка, где она отлична от нуля, касательные к ней перпендикулярны оси абсцисс. Поэтому за кривую распределения случайных ошибок Д. Бернулли принимает полуокружность, радиус которой является пределом возможной величины случайных ошибок, а центр — местом наибольшей плотности вероятности. За эту точку Д. Бернулли принимает не среднее арифметическое значений, полученных при наблюдении, при котором отбрасываются сильно отклоняющиеся наблюдения, так как, по его словам, «может случайно получиться, что отбрасываемое наблюдение как раз могло представить самую лучшую поправку из всех».

В качестве кривой плотности Д. Бернулли предполагает полуокружность вида $y = \sqrt{r^2 - (x - \bar{x})^2}$, где $\bar{x}$ есть та средняя, которой Д. Бернулли предлагает заменить среднее арифметическое. Правило среднего арифметического может применяться толь-

ко в том случае, если известно, что вероятности ошибок всех измерений равны. Однако на практике этого не происходит. «Но разве справедливо утверждать, что наблюдения имеют один и тот же вес или подвержены любой и всякой ошибке? Разве ошибки в несколько градусов так же легко сделать, как ошибки в столько же минут? Разве всюду существует равная вероятность?» [Там же, с. 262]. В связи с этим Д. Бернулли и предлагает заменить среднее арифметическое величиной $\bar{x}$, взятой из уравнения полуокружности (рис. 2). Обозначив результаты наблюдений через 0, a, b, . . .

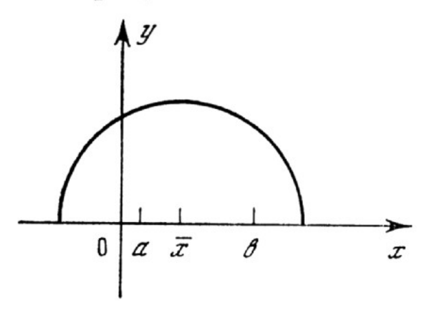


Рис. 2

. . . ($a > 0$, $b > 0$, . . .), Д. Бернулли составляет функцию правдоподобия

$(r^2 - \bar{x}^2)[r^2 - (\bar{x} - a)^2][r^2 - (\bar{x} - b)^2]$ . . . и отыскивает $\bar{x}$ из условия максимума этой функции.

Для удобства подсчета Д. Бернулли рассматривает выражения $r^2 - (\bar{x} - x)^2$, а не $\sqrt{r^2 - (\bar{x} - x)^2}$, которое он привел для уравнения полуокружности, т. е. он фактически за кривую плотности принимает дугу параболы $y = r^2 - (\bar{x} - x)^2$, а не полуокружность. Но нахождение $\bar{x}$ даже в случае малого числа наблюдений приводит к очень громоздким вычислениям.

Эйлер в связи с этой работой Д. Бернулли написал статью «Замечания к предыдущей статье прославленного Бернулли», перевод которой был помещен в журнале «Биометрика» (см. [Bernoulli D., 1923)]. Эйлер считает, что принцип Д. Бернулли ничем не подтвержден и все рассуждения, связанные с ним, представляют «некоторую метафизику». Эйлер предлагает вернуться к средней арифметической и считать эту среднюю по формуле

$$x = \frac{a\alpha + b\beta + \ldots}{\alpha + \beta + \ldots},$$

где a, b, . . . — значение наблюдений, α, β, . . . — соответствующие веса, кроме того, принято

$$\alpha^2 = r^2 - (x - a)^2, \qquad \beta^2 = r^2 - (x - b)^2, \ \ldots$$

Это своеобразное сочетание принципов среднего арифметического и максимального правдоподобия привело Эйлера к значительно более простым вычислениям, чем были у Д. Бернулли.

Д. Бернулли и Эйлер строят плотности распределения вероятности, а это и есть изложение очень важных свойств вероятности. В этом отношении Д. Бернулли сыграл существенную роль в выявлении свойств вероятности.

Кроме упомянутой статьи, у Эйлера имеются работы по демографии и страхованию, которые оказали существенное влияние на их развитие. Наиболее важной из этих работ является работа «Общие исследования о смертности и умножении человеческого рода» [Euler, 1923]. Здесь Эйлер вводит такие фундаментальные понятия демографии, как вероятная продолжительность жизни, прирост населения, порядок вымирания и т. д. Решая задачи о приросте населения, о численности населения в предстоящие годы, о времени удвоения численности населения, Эйлер создал математическую теорию смертности. Эйлер сделал также много ценных выводов и для практической статистики. Наиболее важны его выводы о том, что таблицы смертности нельзя считать универсальными, а они пригодны только для того места, для которого построены, что смертность в больших городах выше, чем в любом другом пункте, что смертность мужчин в соответствующих возрастах выше, чем смертность женщин, что смертность выделенной группы лиц не отражает смертности всего населения. Эйлер решил также много вопросов, связанных со страхованием, его работы помогли создать научную базу для различных видов страхования.

При решении разнообразных демографических задач Эйлер свободно вводит в обиход этой науки различные вероятностные понятия, да и многие задачи являются чисто вероятностными. Например: какова вероятность того, что человек в возрасте m лет проживет еще n лет, и т. п. Эйлер подсчитывает вероятности того, что человек умрет в указанный срок, вероятность выживания и др.

О большом внимании Эйлера к демографическим проблемам говорит хотя бы тот факт, что в работе «Введение в анализ бесконечных», в главе «О показательных логарифмических количествах», Эйлер приводит несколько задач демографического характера.

У Эйлера был еще ряд работ, связанных с устройством различных лотерей и подробным расчетом значения вероятности при разнообразных исходных (см. [Майстров, 1967]).

В теории вероятностей Эйлер ограничивался решением отдельных, чаще всего конкретных задач. Они характеризуют широту его взглядов, а также его интерес к практическим запросам. При решении задач Эйлер часто проявлял изумительное мастерство. Наиболее крупный след он оставил в демографии.

Приложениями теории вероятностей к различным вопросам (лотереи, демография и др.) Эйлер подчеркивал то общее, что имеется во всех этих задачах. Этим общим была вероятность. Разно-

образные применения вероятностных методов являются свидетельством того, что вероятность входит существенной частью во многие явления окружающей действительности.

6. Геометрическая вероятность

В XVIII в. в науку было введено очень плодотворное понятие — геометрическая вероятность. Впервые оно, по-видимому, встречается у Бюффона при решении специально подобранных задач.

Основной труд Ж. Л. Бюффона «Естественная история», оказавший столь большое влияние на развитие естествознания, поражает своей грандиозностью: 44 больших тома, из которых 36 написаны полностью им самим. Как в «Естественной истории», так и в ряде других своих работ Бюффон часто рассматривает различные вероятностные вопросы.

Так, в работе «Опыт нравственной арифметики» (1777) Бюффон рассматривает игру «франк-карро» (franc-carreau — «прямо в клетку»). Игра состоит в следующем. На пол, выложенный шестиугольными плитками, бросают монету, и один игрок держит пари за «франк-карро», т. е. за то, что монета ляжет целиком внутри одного из шестиугольников. Другой ставит за то, что монета пересечет какую-нибудь линию соединения между шестиугольниками. Для решения этого вопроса внутри шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 3) нарисуем другой шестиугольник $abcdef$ так, чтобы его стороны были параллельны первому шестиугольнику и расстояние между сторонами шестиугольников было равно полудиаметру монеты. Теперь ясно, что первый выигрывает, если центр монеты попадает внутрь шестиугольника $abcdef$, и проигрывает, когда центр монеты ложится между контурами обоих шестиугольников. Поэтому вероятность выигрыша первого игрока равна отношению площади внутреннего шестиугольника к площади внешнего.

Здесь мы впервые встречаемся с тем, что вероятность подсчитывают не при помощи подсчета различных исходов, а при помощи отношений площадей, это и есть геометрическая вероятность. Ввиду того, что никакого определения вероятности в то время не было, ни Бюффон, ни другие исследователи не ставили вопроса о том, используют ли они одну и ту же вероятность, когда подсчитывают количество шансов и когда они берут отношение площадей.

Более известна другая задача Бюффона, которая решается также при помощи геометрической вероятности в той же работе.

Какова вероятность того, что игла, имеющая длину l, брошенная на горизонтальную плоскость, расчерченную параллельными прямыми, отстоящими на расстояние a друг от друга, пересечет одну из этих прямых?

Если $l < a$, то искомая вероятность $p = 2l/\pi a$ [1].

[1] Вывод см., например, [Боев, 1950, с. 104—106].

Многими исследователями эта задача использовалась для экспериментального определения π. Произведя определенное количество бросков иглы (n) и зафиксировав количество ее пересечений с параллельными линиями (m), принимали частоту m/n за вероятность p и из равенства $p = 2l/\pi a$ вычисляли π.

Таким путем Вольф при 5000 бросаний иглы нашел $\pi = 3{,}1596$. В 1855 г. А. Смит провел 3204 опыта и получил $\pi = 3{,}1558$. Фокс в 1894 г. при 1120 бросаниях получил $\pi = 3{,}1419$, а Лаццарини

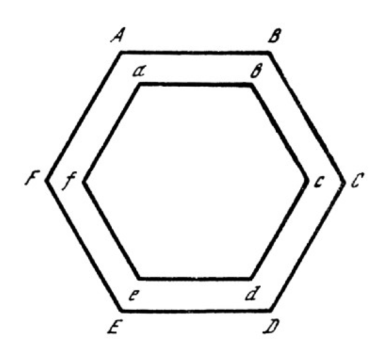


Рис. 3

из 3408 аналогичных опытов в 1901 г. получил для π шесть точных знаков.

Бюффон использует элементы теории вероятностей, в том числе и понятие геометрической вероятности, для обоснования своей гипотезы происхождения планет. Согласно этой гипотезе [1] все шесть известных к тому времени планет: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн — образовались в результате столкновения Солнца с кометой. Бюффон отмечает, что эти планеты обладают рядом общих свойств, и далее перечисляет эти свойства. «Первое из них есть общее направление всех шести Планет, движущихся от запада к востоку: по сему одному обстоятельству можно держать 64 против 1, что Планеты не имели бы движения в одну сторону, если бы не одна и та же причина привела их в движение: содержание сие удобно можно произвесть из правил исчисления случайностей» [Бюффон, 1789, с. 131].

Действительно, если считать, что движение любой планеты вокруг Солнца в одном или другом направлении равновероятно, т. е. вероятность движения в определенном направлении равна $^1/_2$, то вероятность того, что 6 планет случайно будут обращаться вокруг Солнца в одном направлении, равна $(^1/_2)^6 = {^1/_{64}}$.

Бюффон продолжает: «Вторым сходством, что наклонение плоскостей не превосходит 7 степеней с половиной, сия вероятность несказанно умножится: ибо, сравнивая пространства, выходит 24 против 1, чтобы две Планеты находились в плоскостях, боль-

[1] Впервые эта гипотеза была опубликована в его сочинении «Эпохи природы» в 1740 г.

ше между собой отстоящих, и следовательно, 24^5, или 7 692 624, можно держать против 1, что не случаем каким все шесть Планет таким образом расположены и заключены в пространстве, на 7 степеней с половиною простирающемся, или, чтоб то же сказать инако: такова есть вероятность, что Планеты в движении своем имеют нечто общее, давшее им сие положение» [Там же].

Семь степеней — это 7°, 7,5° — это $^1/_{24}$ от 180°. Следовательно, вероятность того, что две случайно выбранные плоскости будут пересекаться под углом не более 7,5°, равна $^1/_{24}$. А вероятность того, что еще четыре случайно взятые плоскости также будут с первой плоскостью иметь угол не более 7,5°, равна $(^1/_{24})^5 = 1/7692624$.

Делая из этих замечаний вывод, что в происхождении планет была общая причина, Бюффон стремится доказать, что такой причиной могло быть только столкновение Солнца с кометой.

Бюффон в этих решениях наряду с обычной к тому времени вероятностью употребляет геометрическую вероятность. Следует отметить, что геометрическая вероятность, возникнув при решении специально придуманных задач, очень быстро нашла применение в естественнонаучных вопросах. Кроме того, Бюффон применял следующее рассуждение. Подсчитывается вероятность какого-нибудь явления, например вероятность движения всех планет в одном направлении; если эта вероятность мала, то утверждается, что это явление не случайно, а закономерно; необходимо искать эту закономерность.

К такому рассуждению прибегали естествоиспытатели и значительно позже. Приведем один пример. Г. Р. Кирхгоф (1824—1887) исследовал спектр железа, состоящий из 60 светлых линий. Он обнаружил, что каждая из этих линий спектра железа совпадает с какой-нибудь темной линией солнечного спектра. Кирхгоф поставил вопрос: возможно ли, чтобы эти совпадения вызывались случайностью? Он установил, что он не может обнаружить различия между линиями, если расстояние между ними менее $^1/_2$ мм. На той шкале, на которой он наблюдал спектры, расстояние между двумя соседними линиями солнечного спектра было равно 2 мм.

Если бы 60 линий спектра железа не были связаны с темными линиями солнечного спектра, то вероятность того, что каждая из них будет ближе, чем на $^1/_2$ мм к какой-нибудь линии солнечного спектра, очевидно, была бы равна $(^1/_2)^{60}$. После этого Кирхгоф пишет, что совпадение линий спектра железа и линий спектра Солнца должно быть обусловлено причиной, которая должна исчерпывающе объяснить этот факт.

Кирхгоф для определения вероятности $(^1/_2)$ пользуется отношением длин, т. е. геометрической вероятностью. Кроме того, Кирхгоф использует соображения о том, что если наблюдаемое явление имеет очень маленькую вероятность, то оно не является случайным, а обусловлено закономерной причиной.

А. Пуанкаре считал такое рассуждение вполне правомерным. Он писал относительно этого: «Сколько бы камней ни было разбросано на горе, они все, наконец, скатятся в долину; если мы найдем один из них внизу, это будет банальным фактом, который ничего не укажет, из предыдущей истории камня мы не можем узнать, в каком месте горы он находился до падения. Но встретив случайно камень вблизи вершины, мы можем утверждать, что он всегда находился там, так как если бы он только попал на склон, то немедленно скатился бы до самого дна; мы сделаем это заключение с тем большей вероятностью, чем случай более исключительный и чем больше имеется шансов ему не произойти» [Пуанкаре, 1923, с. 14].

Кроме введения в науку геометрической вероятности, одного из плодотворнейших понятий теории вероятностей, Бюффон занимался различными вероятностными вопросами. Он указывал, что в вопросах практического характера события, вероятности которых близки к единице, нужно считать достоверными, а события, вероятности которых близки к нулю,— невозможными. Он, например, говорил, что вероятности, равные 0,0001, следует уже рассматривать как вероятности невозможных событий, так как каждый здоровый человек 56 лет уверен, что проживет еще 24 часа, хотя в соответствии со статистическими данными вероятность 56-летнему человеку умереть в течение суток равна 0,0001. Д. Бернулли в письме от 19.III 1762 г. указывает Бюффону, что в статистических данных здоровые не отделены от больных, и поэтому вероятность здоровому 56-летнему умереть в течение суток будет меньше 0,0001. Бюффон соглашается, что, возможно, эту вероятность нужно уменьшить, но общий вывод от этого не изменится.

Бюффон также много занимался таблицами смертности, которые составил Дюпре де Сент-Мор; эти таблицы охватывали 15 приходов. Бюффон приводит эти подробные таблицы, «на которых можно основать вероятности о долготе жизни человеческой» [Бюффон, 1792, с. 153]. На основании этих таблиц он вычисляет «вероятности продолжения жизни» для каждого возраста, понимая под этим понятием срок, вероятность прожить который для данного возраста равна $^1/_2$. Например, рядом с 40 годами стоит 22 года и 1 месяц; это означает, что вероятность 40-летнему прожить еще 22 года и 1 месяц равна $^1/_2$, и так для каждого возраста. «Знание вероятностей продолжения жизни есть вещь весьма важная в естественной истории человека» [Там же, с. 209].

Нужно отметить, что часто Бюффон оперирует не с вероятностями, а с отношением вероятностей. Например, в таблице указано, что количество новорожденных 23 994; умерших в течение первого года 6454; из этого делается заключение: «Можно с вероятностью утверждать и ставить 17 540 против 6454, или, говоря сократительным образом, около $2^3/_4$ против 1, что младенец народившийся проживает один год» [Там же, с. 217].

Как мы видели, Бюффон был неплохим математиком. Он занимался теорией морального ожидания, активно участвовал в обсуждении различных вероятностных вопросов, в частности в переписке с Г. Крамером (1704—1752) — профессором математики в Женеве [Weil, 1961, письмо 3]. Но наиболее важное значение имеет введение им плодотворного понятия геометрической вероятности.

Геометрическая вероятность является распространением понятия вероятности на случаи, когда можно теоретически допустить бесконечное множество исходов и подсчет различных исходов здесь невозможен. В общем случае геометрические вероятности применимы к задачам следующего вида.

Пусть имеется, например, на плоскости некоторая область G и в ней содержится другая область g с квадрируемой границей. В область G наудачу бросается точка (брошенная точка может попасть в любую точку области G); чему равна вероятность того, что точка попадет в область g? При этом предполагается, что вероятность попасть в какую-либо часть области G пропорциональна мере этой части (длине, площади и т. п.) и не зависит от ее расположения и формы.

Следовательно, вероятность попадания в область g при бросании наудачу точки в область G равна $p = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G}$.

Типичной задачей на геометрическую вероятность является задача о встрече. A и B условились встретиться в течение определенного часа. Пришедший первым ждет второго в течение 15 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц A и B, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и момент прихода одного лица не влияет на момент прихода другого.

Задача о встрече применялась к некоторым проблемам организации производства и другим практическим вопросам. Несмотря на плодотворность геометрической вероятности, ее теория неоднократно подвергалась критике за «произвольность» определения вероятности события.

7. Недоверие к вероятности

К середине XVIII в. вероятность стали применять не только в математике, но и в демографии, при оценках ошибок наблюдений и к ряду других вопросов естествознания. Наряду с математическим ожиданием в обиход вошло и моральное ожидание, которое, казалось, находило плодотворное применение. К обычной вероятности присоединилась геометрическая вероятность. Свойства вероятностей все глубже раскрывались в теории вероятностей, в первую очередь посредством применения основных теорем и доказательств предельных теорем.

На всем этом благополучном фоне иногда встречались явно необоснованные попытки применения теории вероятностей к отдельным нравственным вопросам. Но на это пока мало обращали внимания.

Первое серьезное недоверие к вероятностным методам и самой вероятности высказал известный французский математик Ж. Даламбер (1717—1783). Среди богатого научного наследия Даламбера имеется ряд работ, посвященных вероятностным вопросам. Все они помещены во втором томе его «Математических произведений» (Opuscules mathématiques, t. 2. Paris, 1761). Вопросов теории вероятностей он касается и во многих письмах (см. [D'Alembert, 1770].

Имя Ж. Даламбера в литературе по теории вероятностей встречается только с целью иллюстрации того, что даже очень крупные математики ошибались иногда при решении самых элементарных вероятностных задач. Приведем пример: «Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что хотя бы раз появится герб? Даламбер по поводу этой задачи рассуждает следующим образом: герб появится либо при первом бросании, либо при втором, либо совсем не появится. Всех случаев три, из них благоприятствуют ожидаемому событию два, следовательно, искомая вероятность равна $^2/_3$» [Боев, 1950, с. 35—36]. Даламбер здесь не различает равновозможные и неравновозможные случаи. Эта ошибка Даламбера приводится в литературе очень часто. Иногда ее происхождение объясняется тем, что основные идеи теории вероятностей не свойственны математике, и поэтому математики, в частности Даламбер, допускали самые элементарные ошибки. Другие авторы научных работ вообще не касаются причин такой ошибки.

Даламбер вместе с Д. Дидро (1713—1784) начал с 1751 г. издавать и редактировать знаменитую «Энциклопедию». После выхода 7-го тома в 1757 г. Даламбер отошел от «Энциклопедии». Но в семи томах он поместил много статей по математике, философии, литературе и другим вопросам. Его введение в «Энциклопедию» было выдающимся произведением. Для «Энциклопедии» Даламбер написал ряд статей, относящихся и к теории вероятностей. Первой по времени была статья «Герб и решетка» [D'Alembert, 1754]. Именно здесь решается задача, аналогичная той, которую сейчас так часто вспоминают. Даламбер ищет шанс получить два раза герб при двух бросаниях монеты. Он считает, что следует учитывать три случая. Если в первом броске выпадает решетка, то делать второй бросок не имеет смысла, так как два раза герб выпасть уже не может — это, по Даламберу, первый случай. Второй случай состоит в получении герба в первом броске и решетки во втором (+, —). Третий — в получении герба при обоих бросках (+, +). Поэтому, по Даламберу, искомый шанс равен $^1/_3$. Даламбер не придает значения тому, что указанные им три случая не являются равновозможными. Как легко видеть, здесь

будут четыре равновозможных случая: (+, +), (+, —), (—, +), (—, —) и искомая вероятность равна $^1/_4$.

В этой же статье Даламбер ищет вероятность того, что при трех бросаниях монеты герб выпадает, по крайней мере, один раз. Вместо 8 равновозможных случаев (+, +, +), (+, +, —), (+, —,+), (—, +, +), (+, —, —), (—,+,—), (—,—,+), (—,—,—), из которых нашему событию благоприятны 7, так что искомая вероятность равна $^7/_8$, Даламбер составляет следующую табличку:

1) герб (+);
2) решетка, герб (—, +);
3) решетка, решетка, герб (—, —, +);
4) решетка, решетка, решетка (—, —, —).

Он считает, что после того, как при первом или втором броске появится герб, остальные броски делать не следует. Не придавая значения тому, что эти четыре случая неравновозможны. Даламбер считает, что искомая вероятность равна $^3/_4$, а не $^7/_8$.

В этой же статье Даламбер касается «петербургской задачи». По поводу ее решения Д. Бернулли он пишет: «Но мы не знаем, можно ли быть им удовлетворенным, здесь имеется какой-то скандал, который заслуживает внимания математиков» [D'Alembert, 1754, с. 512]. Сам он склоняется к возможности бесконечного ожидания.

В седьмом томе «Энциклопедии» (1757) Даламбер приводит возражения Неккера (профессор математики из Женевы) против своей статьи «Герб и решетка». Неккер сообщил эти возражения Даламберу в письме. Неккер указывает, что три случая, которые рассматривает Даламбер, не являются равновозможными. Далее он приводит правильное решение задачи и в конце говорит, что взгляды Даламбера по этому вопросу неприемлемы, так как они ведут к очевидной ошибке. Хотя Даламбер знал правильное решение задачи, он с ним согласен не был, исходя из своих принципиальных соображений.

В статье «Отсутствующий» [D'Alambert, 1789] Даламбер касается работы Н. Бернулли. Ссылаясь на таблицы смертности А. Депарсье (1708—1768), он приходит к выводу, что безвестно отсутствующий должен считаться умершим в возрасте 75 лет. Далее он говорит, что, учитывая замечания Бюффона, следует считать, что вероятность меньше 0,0001 является несуществующей. Даламбер считает редкие события неосуществимыми в одиночном испытании. В связи с этим он приходит к выводу о непригодности подсчетов математического ожидания выигрыша в азартных играх и о качественном отличии «абсолютной уверенности» от «самой большой вероятности». Фактически он считает, что в одиночном испытании нельзя рассчитывать на осуществление маловероятных событий, а при большом числе испытаний нельзя рассчитывать на неосуществление маловероятных событий, хотя формулирует это категорически.

К статье Даламбера «Отсутствующий» дополнение написал Дидро. В этом дополнении Дидро, ссылаясь на Бюффона, объясняет, как решать проблему отсутствующего при помощи морального ожидания. Он считает, что отсутствующего нужно считать умершим только тогда, когда будет достигнута наибольшая величина моральной уверенности в его смерти, а это достигается тогда, когда полностью исключен страх смерти. Это означает следующее. Пусть известно, что один человек из группы, в которую входит индивидуум A, должен умереть сегодня. Если группа маленькая, A беспокоится о своей судьбе, но начиная с некоторого числа он не беспокоится о своей судьбе, хотя кто-то из группы, к которой он принадлежит, и должен умереть. Дидро считает, что это происходит обязательно при $n = 20000$ ($n = 10000$ он еще не считает достаточно большим). Отсутствующего, по Дидро, следует считать умершим, когда из 20 000 человек его возраста остается в живых только один.

Другие статьи Даламбера в „Энциклопедии", такие как «Выгода», «Бассет» (азартная игра), «Плитка» (азартная игра), «Кость», «Лотерея», «Пари», «Карты», также содержат материал, связанный с теорией вероятностей. Из них видно, что Даламбер знал все основные труды по теории вероятностей.

Во II томе «Математических произведений» Даламбера помещена работа «Размышление о теории вероятностей». В начале работы он приводит обычное определение математического ожидания и замечает, что хотя это определение принято всеми математиками, но имеются случаи, когда оно оказывается несостоятельным. Наглядным примером вопроса, к которому неприменимо математическое ожидание, Даламбер считает „петербургскую задачу", по поводу которой он пишет: «Неограниченная сумма является химерой; не существует человека, который захотел бы заплатить за право играть в эту игру не говоря неограниченную, но даже и весьма скромную сумму» [D'Alembert, 1761].

За основу своего решения Даламбер принял совершенно произвольные положения. Он считал, что если герб выпал при первом бросании, то для этого были какие-то особые причины, поэтому шанс, что выпадет герб при втором бросании, будет не $^1/_2$, а $(1 + \alpha)/2$. Если герб выпал при первом и втором бросании, то шанс на его появление при третьем бросании будет $(1 + \alpha + \beta)/2$ и т. д. $\alpha, \beta \ldots$ положительные величины, причем их сумма меньше единицы.

Даламбер значительно позже в другой работе излагает также это решение [D'Alambert, 1780], в заключение которого пишет: «Этого достаточно, чтобы показать, что члены ставки начиная с третьего бросания уменьшаются. Мы доказали, что вся ставка, являющаяся суммой этих членов, конечна даже при предположении бесконечного числа требований. Таким образом, даваемый нами здесь результат решения петербургской задачи не подвержен неразрешимой трудности обычных решений».

Далее приводятся рассуждения о необходимости делать различие между метафизически возможным и физически возможным. Чтобы разъяснить эти понятия, Даламбер приводит следующий пример. Метафизически возможно получить сто раз подряд по 6 очков на каждой кости при бросании двух костей, но физически это невозможно, потому что это никогда не происходило и не произойдет. Это является для Даламбера подтверждением того, что очень малая вероятность должна рассматриваться равной нулю.

Даламбер предлагает устанавливать вероятность событий на основании опыта. При этом он считает, что если при бросании монеты появился три раза подряд герб, то вероятнее, что при следующем броске выпадет решетка. Это соображение он приводит как аргумент против основных установленных положений теории вероятностей. Затем, возвращаясь к задаче, которую он решал в статье «Герб и решетка», Даламбер опять не различает равновозможные и неравновозможные случаи.

В конце работы он пишет: «Из этих всех размышлений заключаем: 1. Что если правило, которое я дал в „Энциклопедии“ (не зная лучшего) для определения отношения вероятностей при игре в герб и решетку, не является строго точным, то общепринятое правило для определения этого отношения является еще менее точным. 2. Что для того, чтобы прийти к удовлетворительной теории вычисления вероятностей, нужно решить несколько задач, которые являются, может быть, неразрешенными, а именно, установить истинное отношение вероятностей в случаях, не являющихся равновозможными или могущих не рассматриваться как таковые, определить, когда вероятность, должна рассматриваться как несуществующая» [D'Alembert, 1761, с. 24].

Несмотря на свое негативное отношение к теории вероятностей, Даламбер поставил важные вопросы. Как определять вероятность, когда нет налицо равновозможных случаев? И хотя на этот вопрос, по существу, имеется ответ уже у Я. Бернулли, он ставился и обсуждался неоднократно вплоть до XX столетия. Какой вероятностью можно пренебрегать и что это означает? Этот вопрос также обсуждался в науке неоднократно.

В одной из своих работ Д. Бернулли высказался за оспопрививание, подсчитав, что оспопрививание увеличивает среднюю продолжительность жизни на 3 года и 2 месяца. Даламбер выступает с критикой этой работы [D'Alembert, 1821]. Он не отрицает пользы оспопрививания, но считает, что его положительные и отрицательные стороны неправильно сравниваются и оцениваются Д. Бернулли. По мнению Даламбера, Д. Бернулли рассматривает оспопрививание с точки зрения интересов государства и доказывает, что оно является желательным, так как увеличивает среднюю продолжительность жизни. Даламбер же подходит к вопросу с точки зрения отдельного индивидуума, который может рассматривать выгоду выиграть три с небольшим года в вероятной продолжительности жизни как не окупающую непосредственной

опасности от прививки. Связь между этими двумя оценками, по Даламберу, настолько неопределенна, что она не может служить предметом точного подсчета. По этому вопросу Даламбер выступил в Академии наук с докладом 12.XI 1760 г., в котором опровергал идеи Д. Бернулли. Даламбер писал: «Я полагаю, что в среднем 30-летнему человеку предстоит прожить еще 30 лет и что он вполне может надеяться прожить еще 30 лет, полагаясь на природу и не делая себе прививки. Затем я предполагаю, что после операции средняя продолжительность жизни будет 34 года. Не кажется ли, что для оценки преимуществ прививки следует сравнить не только среднюю продолжительность жизни в 30 лет и среднюю продолжительность жизни в 34 года, но и риск, равный 1 против 200, умереть через месяц от прививки, с отдаленным преимуществом жить на 4 года больше после 60?» [D'Alembert, 1761].

Даламбер обращает внимание на существование двух различных способов оценки продолжительности жизни для лиц данного возраста. Первая оценка — это средняя продолжительность жизни; вторая — вероятная продолжительность жизни, это такая продолжительность жизни, которая имеет равные шансы как быть недостигнутой, так и быть превзойденной. Даламбер совсем не предлагает разграничивать эти понятия. Он считает, что каждое из них может служить для определения ожидаемой жизни. Именно это соображение он выдвигает против теории вероятностей, указывая, что она дает два ответа на один и тот же вопрос.

В первом томе Собрания сочинений Даламбера напечатаны его «Сомнения и вопросы относительно теории вероятностей» и «Размышления об оспопрививании» [D'Alembert, 1821]. Эти работы являются изложением для более широкого круга читателей уже упоминавшихся выше работ. При этом иногда привлекается некоторый дополнительный материал.

Касаясь теории вероятностей в целом, он пишет: «Я первый осмелился высказать сомнение относительно некоторых принципов, которые служат основанием для этой теории. Одни великие математики сочли эти сомнения достойными внимания, другие великие математики нашли их абсурдными (зачем я буду смягчать выражения, которыми они пользовались). Задача состоит в том, чтобы узнать, не были ли они неправы, применяя их, и в этом случае они оказались бы вдвое неправыми. Их решение, которое они не сочли нужным мотивировать, придало храбрость средним математикам, которые поторопились написать по этому вопросу и напасть на меня, не выслушав меня. Я попытаюсь объясниться настолько ясно, чтобы все мои читатели были в состоянии судить меня» [Там же].

Следует отметить, что доводы, приводимые против теории вероятностей в этих работах, повторяют доводы предыдущих работ и нового материала, по существу, не содержат.

В IV томе «Математических произведений» [D'Alembert, 1770] помещены выдержки из писем Даламбера, касающиеся теории вероятностей. В них рассматривается «петербургская задача», анализ отдельных игр, вопросы продолжительности жизни, влияние на нее оспопрививания и другие вопросы. В одном из писем он возражает против общепринятого понятия математического ожидания. «Пусть будет предложено выбрать из 100 сочетаний одно. Из этих ста 99 дают выигрыш по 1000 экю и сотое дает выигрыш в 99 тысяч экю. Кто будет настолько бессмысленным, чтобы предпочесть сочетание, которое дает 99 тысяч экю? Ожидание в обоих случаях не является одним и тем же, хотя оно является одним и тем же согласно правилам теории вероятностей».

Даламбер в своих письмах неоднократно повторяет знакомые нам возражения против теории вероятностей. «Уже около тридцати лет тому назад у меня сформировались эти сомнения при чтении превосходной книги г. Бернулли».

Возвращаясь к решению задачи о получении двух гербов при двух бросаниях монеты, Даламбер пишет: «Если три случая единственные, которые могут произойти в этой игре, не являются одинаково возможными, то это вовсе, как мне кажется, не на том основании, которое этому придают, что вероятность первого есть $^1/_2$, а вероятности двух других $^1/_2 \cdot {}^1/_2$ или $^1/_4$. Чем больше об этом я думаю, тем больше мне представляется, что, говоря математически, эти три бросания являются одинаково возможными» [Там же].

Даламбер рассматривает математические и физические вероятности [D'Alembert, 1780]. Для их различия он приводит следующие примеры. Если два взаимоисключающих события математически равновероятны и первое из них произошло несколько раз подряд, то физически более вероятным становится появление второго события. Наряду с этим Даламбер высказывает мысль о желательности вычисления вероятностей событий в зависимости от исходов экспериментов. Но если принять различие между математической и физической вероятностью, то по эксперименту ничего нельзя установить. Даламбер считал, что последовательности 100 гербов или 100 решеток при бросании монеты менее вероятны, чем любая другая последовательность, получаемая при 100 бросках; он считал, что вероятность выпадения герба m раз подряд при бросках одной монеты меньше вероятности выпадения m гербов при однократном броске m монет и т. п.

Кажется, что ошибочность всех этих утверждений Даламбера сейчас очевидна. Но многие из поставленных вопросов касаются основ теории вероятностей и до последнего времени привлекают внимание. Так, например, Мостеллер с соавторами пишут: «При бросании правильной монеты много раз доля случаев, когда она выпадает гербом кверху, будет близка к $^1/_2$. Некоторые чувствуют, что логическим следствием из этого обстоятельства является то, что после появления 10 гербов подряд появление цифры становит-

ся более вероятным. Этот взгляд основан на недоразумении, причиной которого является непонимание того, как применять „закон средних“ к бросаниям монеты. Так как монета не обладает ни памятью, ни сознанием, ни способностью влиять на свое поведение, то она вряд ли может сама изменить вероятность выпадения кверху гербом или цифрой» [Мостеллер и др., 1969, с. 40]. Как же в этом случае применяется закон средних? Те же авторы, ссылаясь на Феллера, дают такое объяснение: «Он говорит, что закон средних работает здесь при помощи поглощения, а не при помощи компенсации. Другими словами, если некоторая серия бросаний началась с выпадения 10 гербов, то эти 10 гербов в существенной доле поглотятся результатами тысячи бросаний, а после миллиона бросаний их влияние станет совсем незаметным» [Там же, с. 40—41].

В конце работы Даламбер ссылается на письма к нему трех математиков, одного из которых он характеризует как «очень образованного писателя, который разрабатывал с успехом математику и который известен превосходной работой по филологии». Этот его корреспондент писал: «Все, что вы высказываете о вероятности, превосходно и весьма очевидно, старое исчисление вероятностей разрушено». Даламбер делает примечание к этому месту: «Я вовсе не претендую на это, я не претендую вовсе разрушить исчисление вероятностей, я желаю, чтобы оно было изменено и улучшено» [D'Alembert, 1780].

В VII томе, опубликованном в 1780 г., помещен его мемуар «Об исчислении вероятностей» [Там же]. Этот мемуар посвящен главным образом «петербургской задаче». Даламбер начинает этот мемуар словами: «Я прошу прощения у математиков за то, что снова возвращаюсь к этому вопросу. Но я признаюсь, что чем больше я о нем думаю, тем более я убеждаюсь в своих сомнениях относительно принципов общепринятой теории. Я желаю, чтобы эти сомнения были разъяснены и чтобы эта теория, будут ли в ней изменены некоторые принципы, или она будет сохранена такой, какая она есть, по меньшей мере излагалась бы впредь так, чтобы не было места туману».

Во всех обсуждаемых вопросах теории вероятностей Даламбер всегда оставался на позиции недоверия к этой науке, несмотря на ее крупные и несомненные успехи. Он всегда отрицал ее основные принципы. Поэтому ошибки, которые он допускал при решении отдельных задач, не были случайными, а вытекали из его отрицания теории вероятностей как науки.

В работах, касающихся вероятностных вопросов, Даламбер часто ссылается на Бюффона. Вслед за ним он считает, что вероятности, меньшие 1/10000, следует считать равными нулю. Даламбер рассматривает, какова вероятность того, что Солнце взойдет на следующий день. Он несколько склоняется к моральному ожиданию, когда говорит о том, что азартные игры невыгодны даже тогда, когда математическое ожидание выигрыша

равно нулю. В его работах имеется еще много мест, относящихся к теории вероятностей.

Даламбер высказывает недоверие к вероятностным принципам и при рассмотрении вопросов статистики народонаселения. В различии между вероятным и средним сроком жизни он видит недостаток теории вероятностей. При комментировании мемуара Д. Бернулли «Опыт нового анализа смертности» Даламбер замечает [D'Alembert, 1770, с. 310—341], что исходные предпосылки Д. Бернулли об эпидемиях оспы слишком упрощены и что необходимы подробные статистические данные. Он утверждает, что окончательный вывод о пользе инокуляции не может быть сделан только на основании удлинения среднего срока жизни: не каждый согласится инокулироваться и тем самым подвергнуть себя риску, пусть даже очень малому, скорой смерти в обмен на отдаленную перспективу прожить несколько дополнительных лет. Кроме того, Даламбер обращает внимание на моральную сторону вопроса, например, при инокулировании детей, и поэтому математический анализ здесь невозможен и т. п. Несмотря на эти возражения, Даламбер поддерживает инокуляцию, предлагая выдавать компенсацию или знаки отличия семьям, в которых кто-нибудь погиб от нее.

В конце своих комментариев Даламбер предлагает собственный метод сравнения рисков смерти от оспы и от инокуляции. Этот метод очень громоздок и никакого распространения не получил.

Очень интересно замечание Л. Эйлера относительно позиции Даламбера, занятой им по отношению к теории вероятностей. Рассказав содержание одной задачи и поставив ряд вопросов, Эйлер в работе «Решение некоторых более трудных вопросов теории вероятностей» [1], пишет: «Я намереваюсь решить эти трудные вопросы на основании уже давно известных принципов исчисления вероятностей. И меня не останавливают возражения знаменитого Даламбера, который пытался сделать сомнительным это исчисление. После того, как великий математик оставил математические занятия, представляется, что он даже объявил им войну, так как он приступил к разрушению многих наиболее твердо установленных основных положений. Хотя эти возражения, должно быть, имеют большое значение для незнающих, однако нечего бояться, что они принесут какой-нибудь ущерб науке» [Euler, 1923, с. 408].

Нужно сказать, что на негативное отношение Даламбера к теории вероятностей указывала еще Е. Ф. Литвинова. Она пишет: «Он принимал очень деятельное участие в ученом споре относительно задачи, известной тогда под именем „петербургской". Задача принадлежала к теории вероятностей. Работы Паскаля, Якова Бернулли и Гюйгенса не могли, однако, внушить Даламберу

---

[1] Работа Эйлера «Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium» впервые была опубликована в 1785 г.

почтение к этой новой отрасли математики. Тогда многие математики увлекались ею и прилагали ее без разбора к вопросам, по своей природе не подлежащим ей. Может быть, это и отталкивало Даламбера от самой теории вероятностей. Он впадал в другую крайность, отрицая ее принципы, верность которых оправдало будущее. Это легко объяснить тем, что у Даламбера не было времени хорошенько вникнуть в теорию, узкопрактические приложения которой были ему так глубоко антипатичны» ([Литвинова, 1891, с. 74—75; см. также [Майстров, 1966]).

Итак, мы видели, что Даламбер много занимался различными вероятностными вопросами, хорошо знал основные достижения и приложения теории вероятностей. Поэтому нельзя признать причинами его ошибок при решении вероятностных задач и вопросов то, что у него «не было времени хорошенько вникнуть в теорию» или что вероятностные вопросы для него были неожиданны и лежали далеко от его интересов и т. п.

Даламбер критически относился к теории вероятностей, он ее не относил к «точным и верным исчислениям ни по принципам, ни по результатам» [D'Alembert, 1761, с. 309]. Это было вызвано тем, что, несмотря на все несомненные успехи теории вероятностей, ее основные понятия были не выяснены. В первую очередь это относится к вероятности. Фактически в это время никакого определения понятия вероятности не было, свойства ее не были описаны. Математики еще не воспринимали закон больших чисел Я. Бернулли и другие теоремы как описание существенных сторон вероятности. Не имея характеристик вероятности, ее пытались применять к самым разнообразным вопросам, в том числе и к таким, к которым понятие вероятности неприменимо. Это и вызвало отрицательную реакцию у Даламбера. Он выступал против основных положений теории вероятностей для того, чтобы улучшить ее, понимая большое значение этой науки. Это происходило не от того, что он не понимал некоторых элементарных вещей, наоборот, он глубоко проник в сущность теории вероятностей и отметил ряд противоречий и неясных мест в основных понятиях, на которые она опиралась.

Нельзя, конечно, отрицать, что Даламбер в своих критических замечаниях допускал легкоустранимые ошибки. Их-то в основном и заметили те, кто писал о негативном отношении Даламбера к теории вероятностей.

Подчеркивая недостатки изложения основ теории вероятностей, Даламбер тем самым обращал на них внимание, что вызвало стремление не только уличить в ошибках Даламбера, но и устранить недостатки. Как мы увидим в дальнейшем, такие же цели преследовали парадоксы, высказанные Бертраном, критические замечания Пуанкаре и др.

8. Формула Байеса и вероятность

Формула Байеса содержится во всех учебниках по теории вероятностей. Суть этой формулы состоит в следующем.

Пусть событие B может осуществиться с одним и только одним из n несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т. е.

$$B = \sum_{i=1}^{n} BA_i, \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i).$$

По формуле полной вероятности

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B).$$

По теореме умножения мы для любого A_k можем записать

$$P(A_k B) = P(A_k)\, P_{A_k}(B) = P(B)\, P_B(A_k).$$

Определим отсюда $P_B(A_k)$. Учитывая формулу полной вероятности, получим

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)\, P_{A_k}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)\, P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}.$$

Это и есть формула, которую теперь называют формулой Байеса апостериорной вероятности события A_k. Эта формула в словесном виде была причислена Лапласом к основным принципам теории вероятностей (принцип VI) [Лаплас, 1908].

Зная теорему умножения вероятностей, формулу Байеса можно получить непосредственно как другой вид записи формулы умножения вероятностей. Поэтому неясно, что нужно понимать под утверждением, которое часто фигурирует в курсах теории вероятностей: «Эта формула была найдена в середине XVIII в. английским математиком Байесом» [Боев, 1950, с. 218].

Рассмотрим, что же в действительности было сделано Байесом в теории вероятностей.

Биографические сведения о Байесе в литературе очень скудны и часто неверны. Так, например, в БСЭ (2-е изд.) в статье «Байес» не указан год его рождения, а год смерти указан неверно (1763).

В действительности Томас Байес родился в Лондоне в 1702 г. Образование он получил дома. Имеется предположение, что его домашним учителем был Муавр, который в это время вел в Лондоне частное преподавание. Отец Томаса был членом Королевского общества, он имел духовный сан и был пастором в одной из церквей Лондона. Т. Баейс также получил духовный сан и начал помогать отцу в выполнении его пасторских обязанностей.

В 1720 г. в Танбридже, в 50 км от Лондона, была организована религиозная секта. Вскоре туда переехал и Т. Байес. В 1731 г.

он пишет трактат «Божественная доброта, или Попытка доказать, что принцип конечного божественного поведения и управления является счастьем его создателя». Этот трактат был издан Джоном Нуном. В 1736 г. тот же Нун издает анонимный трактат «Введение в проблему флюксий и защита математики от автора аналиста». Этот трактат многие приписывают Байесу.

В 1742 г. Байеса избирают в члены Королевского общества. В 1752 г. он отошел от всех дел, передав все свои обязанности и личную библиотеку Вильяму Джонстону. Байес продолжал жить в Танбридже до своей кончины, наступившей 17 апреля 1761 г.

Кроме упомянутой работы, известно еще письмо Байеса Джону Кентону об асимптотических рядах, опубликованное в «Philosophical Transactions of the Royal Society» (1763 г.). В тех же «Философских трудах» за 1763 г. Р. Прайсом [1] были опубликованы работы Байеса по теории вероятностей под названием: «Опыт решения задачи по теории вероятностей покойного достопочтенного мистера Байеса, члена Королевского общества, сообщено мистером Прайсом в письме к Джону Кентону, магистру искусств, члену Королевского общества» [2].

Эта работа под заглавием «Очерки к решению проблемы доктрины шансов Томаса Байеса» была напечатана в 1958 г. в журнале «Biometrika».

Перед работой Байеса помещено сопроводительное письмо Прайса к Кентону от 10.XI 1763 г. В этом письме Прайс пишет: «Я посылаю Вам сейчас опыт, который я нашел среди бумаг нашего скончавшегося друга, мистера Байеса, и который, по моему мнению, имеет большие достоинства и вполне заслуживает быть сохраненным» [Bayes, 1958, с. 296].

В письме Прайса говорится о содержании работы Байеса и содержится просьба к Кентону зачитать эту работу на заседании Королевского общества. Эта просьба была выполнена, и работа Байеса зачитывалась на заседании Королевского общества 23.XII 1763 г.

Работа Байеса начинается с формулировки общей задачи. «Дано число раз, когда неизвестное событие наступило и не наступило. Отыскивается шанс, что вероятность его наступления при одном-единственном испытании лежит между какими-нибудь двумя, могущими быть названными, степенями вероятности» [Там же, с. 298].

После общей формулировки задачи Байес переходит к основным определениям и положениям теории вероятностей. Относительно этой части работы Прайс пишет: «Байес полагал начать свою

---

[1] Ричард Прайс (1723—1791) — член Королевского общества с 1764 г., экономист и философ. Основные работы Прайса относятся к вопросам религии и морали. Прайс был сторонником французской буржуазной революции.

[2] По-видимому, в результате этой публикации возникло неверное предположение, что Байес умер в 1763 г.

работу кратким доказательством общих законов вероятности. Основанием сделать это, как он говорит в своем введении, было не только то, чтобы его читатель не имел заботы искать в другом месте общие принципы, на которых он основывается, но и то, что он не знал, куда отослать его за ясным их доказательством. Он также оправдывается за специальные определения, даваемые им слову „шанс", или „вероятность". Его намерением в этом случае было пресечь все споры о значении слова, которое в обычном языке употребляется в различных смыслах» [Там же].

Из этого замечания Прайса следует, что в работе Байеса существовало введение, которое не было опубликовано. Можно предположить, что Прайс его и не посылал Кентону, иначе ему незачем было так подробно пересказывать содержание введения. Прайс передает слова Байеса о том, что слово «вероятность» употребляется в различных смыслах, а это вызывает споры. Кроме того, Байес отождествляет «шанс» и «вероятность», хотя очень многие считали, что вероятность есть отношение шансов.

Прайс подчеркивает, что Байес не знал источника, в котором были бы ясно изложены основные принципы теории вероятностей и, в частности, основные свойства вероятности. Хотя, как мы увидим, Байес и начал «свою работу кратким доказательством общих законов вероятности», но «основание сделать это», «оправдание» за определение вероятности и т. п., по-видимому, теперь уже потеряно.

Байес в начале работы формулирует семь определений. Приведем их полностью.

«1. Несколько событий являются несовместимыми, если наступление одного из них исключает наступление остальных.

2. События являются исключающими друг друга, если одно из них должно наступить, но оба одновременно наступить не могут.

3. Говорят, что событие не состоялось, если оно не наступает, или если наступает исключающее событие.

4. Говорят, что событие определено, если оно наступило или не наступило.

5. Вероятность какого-нибудь события есть отношение значения, которое дается ожиданию, связанному с наступлением события, и значения ожидаемой в этом случае прибыли.

6. Под шансом я понимаю то же самое, что и под вероятностью.

7. События являются независимыми, если наступление одного не уменьшает и не увеличивает вероятности остальных» [Там же, с. 298—299].

Некоторые из этих определений, например 1 и 7, почти полностью совпадают с современными определениями. Конечно, определение вероятности у Байеса не отличается ясностью.

Далее доказывается ряд основных теорем, которые Байес называет предложениями. Первым предложением является теорема сложения вероятностей.

«Предложение 1. Если несколько событий являются несовместимыми, то вероятность того, что наступит одно или другое из них, равна сумме вероятностей каждого из них» [Там же, с. 299].

При рассмотрении доказательства этой теоремы хорошо видно, что Байес понимает и употребляет понятие вероятности, поэтому мы это доказательство приведем полностью.

«Предположим, что существуют три такие события, что, если наступит одно из них, я получаю сумму N, а также, что вероятность первого, второго и третьего суть $\frac{a}{N}$, $\frac{b}{N}$, $\frac{c}{N}$, тогда (согласно определению вероятности) значение моего ожидания первого события будет a, второго — b и третьего — c. В силу этого значение моих ожиданий всех трех есть $a + b + c$. Но сумма моих ожиданий всех трех есть в этом случае ожидание получить сумму N, если наступит одно из трех событий. Поэтому (по определению 5) вероятность одного или другого из этих событий

$$\frac{a+b+c}{N} \text{ или } \frac{a}{N} + \frac{b}{N} + \frac{c}{N}.$$

Это есть сумма вероятностей каждого из них» [Там же].

Из этой теоремы Байес получает следствие, что если вероятность наступления события равна P/N, то вероятность его ненаступления будет $(N - P)/N$. Далее он пишет: «Если достоверно, что одно или другое из трех событий должно наступить, тогда будет $a + b + c = N$» [Там же].

В случае равновозможных исходов вероятность, по Байесу, есть отношение математического ожидания к сумме всех значений случайной величины. Действительно, если

$$p_1 = p_2 = \ldots = p, \text{ то } p = \frac{\sum x_i p_i}{\sum x_i} = \frac{p \sum x_i}{\sum x_i} = p.$$

Затем Байес доказывает теорему умножения вероятностей. «Вероятность того, что наступят оба взаимосвязанных события, есть отношение, получающееся от перемножения вероятности наступления первого события на вероятность наступления второго, при предположении, что первое событие наступило» [Там же].

Теперь мы это записываем так: $P(A \text{ и } B) = P(A)\ P_A(B)$.

Из теоремы умножения вероятностей Байес получает следствие: «Если вероятность первого из двух следующих друг за другом событий a/N, вероятность обоих вместе p/N, то вероятность второго, при предположении, что первое наступило, есть p/a» [Там же, с. 300]. Это означает, что из $P(A \text{ и } B) = P(A)\ P_A(B)$ следует

$$P_A(B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(A)} = \frac{P/N}{a/N} = \frac{p}{a}.$$

Приведем еще некоторые предложения.

«Если имеются два взаимно связанных события и вероятность второго b/N, а вероятность обоих вместе p/N, и вначале стало известно, что второе событие наступило, то я предполагаю, что другое событие [т. е. наступление обоих событий вместе] тоже наступило. Вероятность, что я окажусь правым, есть p/b» [Там же, с. 301].

Действительно, в случае, когда нам известно, что второе событие уже произошло, вероятность совместного наступления обоих событий будет равна вероятности первого события при условии, что второе событие произошло:

$$P_{\text{II}}(\text{I}) = \frac{P(\text{I и II})}{P(\text{II})} = \frac{p/N}{b/N} = \frac{p}{b}.$$

По-видимому, Байес первый четко сформулировал теоремы сложения и умножения вероятностей и доказывал их исходя из основных принципов, изложенных в начале работы. Кроме того, он отчетливо ввел понятие условной вероятности.

В следующем предложении рассматривается вероятность одновременного наступления нескольких независимых событий. В следствии к этому предложению Байес пишет: «Если имеется несколько независимых событий и вероятность каждого из них есть a и ненаступления его b, то вероятность наступления первого, ненаступления второго и третьего и наступления четвертого будет $abba$» [Там же].

Последнее предложение содержит вывод формулы Я. Бернулли

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

«Если вероятность наступления какого-нибудь события будет a, а вероятность ненаступления его при отдельном испытании будет b, то вероятность его наступления p раз и ненаступления q раз при $p + q$ испытаниях есть Ea^pb^q, если E будет коэффициент члена, в котором встречается a^pb^q в разложении бинома $(a + b)^{p+q}$» [Там же, с. 302].

Выводом этой формулы и кончается первый раздел.

Больше никаких работ Байеса по теории вероятностей неизвестно.

Эта работа Байеса имеет большое значение в истории теории вероятностей. Байес впервые пришел к биномиальной кривой распределения, получив все ее основные свойства. Если бы он не ограничивался отрезком (0, 1), а рассматривал кривую на всей числовой оси, он мог бы получить кривую нормального распределения. Байес указал правило нахождения вероятностей того, что искомая вероятность заключена между заданными пределами. Фактически таким же правилом пользуются и теперь, вычисляя вероятность по теореме Лапласа, только у Лапласа кривая нормального распределения, а у Байеса — биномиального распределения.

Как мы видим, в работе Байеса «формулы Байеса» нет. Вообще, это название появилось, по-видимому, только в конце XIX в. Эти формулы связывают с именем Байеса, возможно, потому, что они, как и результаты работы Байеса, имеют отношение к оценке вероятности после того, как известны результаты некоторых испытаний.

Работа Байеса была фактически забыта, и его имя связывалось только с «формулой Байеса», которой нет в работе. Эта формула часто подвергалась обсуждениям.

Схема применения формулы Байеса такова. Пусть событие B может происходить в условиях, относительно которых могут быть сделаны гипотезы $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Вероятности этих гипотез до испытаний будут $P(A_i)$. Гипотеза A_i сообщает событию B вероятность $P_{A_i}(B)$. Произведен опыт, в котором событие B наступило. Это вызывает переоценку вероятностей гипотез $P(A_i)$. Эта переоценка и производится при помощи формулы Байеса.

Но часто допускалось ошибочное использование формулы Байеса, при котором не учитывалось, что отысканию подлежит апостериорный закон распределения случайной величины с известным априорным законом распределения. В работе Байеса априорное распределение (точки на AB) принималось равномерным, но формулу Байеса можно обобщить и на другие априорные распределения. Но при применении формулы Байеса априорное равномерное распределение иногда подменялось «полным незнанием» случайной величины; при помощи этой формулы пытались также отыскивать неизвестные постоянные величины, т. е. применять вероятностные формулы к величинам, не имеющим вероятностный характер.

9. «Собственно вероятность» Кондорсе

Кондорсе, известный политический и общественный деятель буржуазной французской революции, довольно много занимался и вопросами теории вероятностей, в первую очередь с точки зрения ее применения к социальным вопросам. Наиболее крупной его работой по теории вероятностей является [Condorcet, 1785].

Мы остановимся на попытке Кондорсе наряду с вероятностью ввести понятие «собственно вероятность».

В шестой части работы Кондорсе так говорит о своей новой вероятности: «Не следует понимать под собственно вероятностью события отношение числа имеющих место сочетаний к общему числу сочетаний. Например, если из 10 карт извлекается одна карта и свидетель говорит, что это была именно такая-то карта, то собственно вероятность этого события, которую нужно сопоставить с вероятностью, рождающейся из свидетельства, не есть вероятность извлечь эту карту, которая будет $^1/_{10}$, а есть вероятность извлечь эту карту предпочтительно, чем другую какую-либо определенную карту, и так как все эти вероятности одинако-

вы, то собственно вероятность будет в этом случае $^1/_2$. Одинаковые свидетельства могут производить для необычного события вероятность, равную той, которую они производят для обычного события, если, например, я верю здравомыслящему человеку, который сказал мне, что женщина родила мальчика, то я должен одинаково верить ему, если бы он сказал мне, что она родила четырех. Другие, напротив, убеждены, что свидетельства сохраняют всю свою силу для необычных и маловероятных событий, и они поражаются тому, что если извлекается один билет из 100 000 и человек, достойный доверия, говорит, что первый выигрыш выпал, например, на номер 256, то никто не усомнится в его свидетельстве, хотя можно заключать пари 99 999 против одного, что это событие не произойдет. Однако на основании предыдущего замечания видно, что собственно вероятность события будет $^1/_2$ и свидетельство сохраняет всю свою силу... Поэтому я предлагаю принимать за собственно вероятность события отношение числа сочетаний, производящих это или подобное событие, к общему числу сочетаний.

В случае, когда извлекается одна из десяти карт, число сочетаний, при которых извлекается какая-либо определенная карта, есть единица и число сочетаний, при которых будет извлечена какая-либо другая определенная карта, тоже есть единица, значит, собственно вероятность выразится через $^1/_2$» [Condorcet, 1785].

После ряда примеров Кондорсе применяет свои рассуждения к достоверности некоторых свидетельств. Он пишет: «Я попытаюсь применить установленные мною принципы к вопросам критики» [Там же].

Считается, что продолжительность царствования семи императоров Рима составляет 257 лет. Проверяя достоверность этого утверждения, Кондорсе исходил из предположения, что император должен иметь возраст между 30 и 60 годами. Кроме того, он использовал формулу для определения количества населения, предложенную Муавром. В окончательном результате Кондорсе приходит к выводу, что собственно вероятность этого события равна $^1/_4$.

Относительно утверждения о том, что авгур Акциус Нэвиус рассек ножом камень, Кондорсе находит его собственно вероятность 2/1000000.

Понятие собственно вероятности необоснованно. Его противопоставление понятию вероятности чисто субъективное и математически ничем не подтверждено. В науке оно не сохранилось. Вообще вся направленность вероятностных работ Кондорсе оказалась в целом несостоятельной. Не имея четких представлений о вероятности, а тем самым и о применениях теории вероятностей, Кондорсе, отыскивая возможные применения, пошел по ложному пути.

Араго отмечает («Oeuvres de Condorset», 1847—1849, 1, с. XXIII), что применение теории вероятностей в области пожизнен-

ных рент, страхования и т. п. не встретило большого сопротивления. Но когда Кондорсе, основываясь на работах Н. Бернулли, попытался применить ее в юриспруденции, морали и политике, завязался спор о допустимости такого применения.

Гуро в своей работе «Histoire du Calcul des probabilites» [Paris, 1848, с. 88—104] отмечает следующие недостатки в работе Кондорсе: тяжелый, лишенный точности стиль, путаные философские позиции. Но, с другой стороны, он отмечает новые остроумные идеи, оригинальные методы.

Высокую оценку работам Кондорсе по теории вероятностей дал Пуассон в своей работе [Poisson, 1837].

10. Вероятностные вопросы в философии

Декарт, Гоббс и Спиноза заложили основы детерминистического истолкования мира, хотя их детерминизм был механическим: причинные связи между явлениями они истолковывали как результат механического взаимодействия тел. Они отрицали случайность и считали все события необходимыми. Гоббс приходит к выводу, что человеческая воля также детерминирована. Он говорил о совместимости свободы и необходимости. «Вода реки, например, имеет не только свободу, но и необходимость течь по своему руслу» [Гоббс, 1964, с. 233].

Для философов XVIII в. характерно отрицание случайности и превозношение необходимости.

Рассмотрим высказывания некоторых философов по этим вопросам.

Д. Толанд (1670—1722), английский философ, в своей работе «Письма к Серене» [1] (1704) писал: «Величайшей нелепостью представляется мне обожествление случайности, этой прямой противоположности всякому порядку, разуму и плану» [Толанд, 1967, с. 119].

В другой своей работе «Пантеистикон» Толанд в уста Распорядителя вкладывает следующие слова: «Сила и энергия целого иногда обозначается именем провидения, которым все, что есть на небе и на земле, располагается согласно законам разума, так что не остается места случаю или року» [Там же, с. 388].

Позицию Толанда в этом вопросе Мееровский характеризует следующим образом: «У Толанда мы встречаемся с положением о всеобщей закономерности в природе, порождаемой движением материи. Повсюду царствует необходимость, и ничто не может произойти иначе, чем так, как установлено законами бытия» [Мееровский, 1967, с. 28].

---

[1] Серена — псевдоним прусской королевы Софии-Шарлотты, по приглашению которой Толанд посетил Берлин в 1701 г. Королева была знакома с Лейбницем и другими учеными, в ее салоне велись диспуты, в которых принимал участие Толанд. В результате этих бесед и возникли «Письма к Серене».

Другой английский философ А. Коллинз (1676—1729) говорит о том что «проблемы *свободы*, *необходимости* и *случайности* были предметами споров у философов всех времен» [Коллинз, 1967, с. 66]. Кроме того, он относит эти вопросы к таким, о природе которых «невозможно говорить ясно и отчетливо». Но, несмотря на это, свою мысль он высказывает вполне определенно. Коллинз выступает против учения древних атомистов, согласно которому упорядоченный мир мог быть порожден беспорядочным или случайным движением атомов. «Случайность не может породить упорядоченной системы вещей» [Там же, с. 39]. Коллинз считал, что все явления необходимы, он отрицал объективный характер случайности, истолковывая необходимость в фаталистическом плане. «Человек является необходимым агентом» [Там же, с. 53], при этом «продолжительность человеческой жизни предопределена» [Там же, с. 63]. «Для Юлия Цезаря было бы невозможно не погибнуть в сенате, как невозможно, чтобы дважды два было шесть» [Там же, с. 65]. «Причина, которой соответствует действие, есть необходимая причина» [Там же, с. 39].

Коллинз говорит, что такие слова, как „случай“ и „случайность“ не имеют смысла.

На аналогичных позициях стоят и многие другие философы XVIII в. Метафизическое понимание причинной связи, отрицание объективного характера случайности приводило к выводу о предопределенности всего существующего. Например, Д. Пристли (1733—1804) пишет: «Весь ряд событий с начала мира и до окончания его представляет одну связную *цепь причин и следствий*, первоначально установленную божеством» [Пристли, 1968, с. 384]. В другом месте еще более категорично: «Согласно установленным законам природы, ни одно событие не могло произойти иначе, чем оно произошло или произойдет, поэтому все явления в прошедшем, настоящем и будущем в точности таковы, как задумал их творец природы» [Там же, с. 391].

У всех этих философов сказывается общий порок метафизического детерминизма, который сводит необходимое до уровня случайного и одновременно необходимость считает фатальной.

Отрицание случайности не способствовало усвоению достижений математики в области истолкования вероятности. Поэтому, хотя они и касаются вопросов необходимости, судьбы и т. п., проблемы вероятностного характера они не обсуждают.

Взгляды философов, отрицающих случайность, оказывали некоторое влияние на общий подход математиков к вероятностным проблемам. Это мы увидим в дальнейшем, в частности при рассмотрении позиций Лапласа.

П. А. Гольбах (1723—1789) стоял на ярко выраженной позиции детерминизма, согласно которой все, даже самые ничтожные явления в природе, предопределены, случайность при этом полностью исключается. Гольбах писал: «В вихре пыли, поднятом бурным ветром, как бы он нам ни казался хаотичным в ужаснейшей грозе,

порожденной противоположными ветрами, вздымающими волны, нет ни одной молекулы пыли или воды, которая расположена случайно, которая не имеет своей достаточной причины, чтобы занимать то место, где она находится, и которая действует в строгости с тем способом, каким она должна действовать. Математик, который знал бы в точности различные действующие в этих двух случаях силы и свойства приведенных в движение молекул, доказал бы, что согласно этим данным причинам каждая молекула действует в точности так, как она должна действовать, и не может действовать иначе, чем она это делает» [Гольбах, 1940, с. 35—36].

К. А. Гельвеций (1715—1771) шел еще дальше, распространяя детерминизм на поведение людей.

«Если известны характеры двух друзей и указаны условия, в которых они находятся, и им предстоит поссориться, то несомненно, что умный человек может предсказать момент, когда эти люди перестанут быть полезными друг другу, и вычислить момент их разрыва с такой же точностью, как астроном момент затмения» [Гельвеций, 1938, с. 204].

11. Взгляды Юма на вероятность

В отличие от многих философов XVIII в. Д. Юм специально останавливается на проблемах, связанных с понятием вероятности, и довольно подробно излагает свое учение о ней. Нарский [Нарский, 1965] отмечает, что у Юма вероятность переплетается с различными значениями понятия случайности, это приводит ко многим неясностям, а иногда и к противоречиям.

В своей работе «Трактат о человеческой природе» Юм довольно подробно излагает свои взгляды на вероятность. «Философы, разделившие человеческие познания *на знание и вероятность* и определившие первое как *очевидность, которая получается из сравнения идей*, вынуждены были объединить все наши заключения из причин или действий посредством общего термина *вероятность*» [Юм, 1965а, с. 227]. Юм утверждает, что опыт и наблюдения могут дать достоверные знания. «Многие из наших аргументов из причинности более чем вероятны и могут быть признаны высшим родом очевидности. Нам показался бы смешным всякий, кто сказал бы, будто только вероятно, что солнце завтра взойдет или что все люди должны умереть, хотя ясно, что у нас нет другой уверенности в этих фактах, кроме той, которую дает нам опыт» [Там же, с. 227—228]. Отметим, что подсчетом вероятности того, что Солнце завтра взойдет, занимались многие ученые, в том числе и Лаплас.

Юм предлагает разделить человеческое познание на знание, доказательства и вероятность, при этом под вероятностью он понимает такую очевидность, которая сопровождается неуверенностью. «Вероятность, или предположительное заключение, может быть двух видов, а именно: вероятность, основанная на *случай-*

ности, и вероятность, происходящая из *причин*» [Там же, с. 228]. У Юма имеются три вида случайности, которые порождают несколько различные вероятности. 1. Случайность, как беспричинность. 2. Случайность, обусловленная неизвестными или практически непознаваемыми причинами. 3. Случайность, обусловленная малозначительными или мелкими факторами. Во всех случаях случайность выступает как отрицание причины. «Одна случайность может превосходить другую только в том случае, если она составлена из бо́льшего числа равных шансов» [Там же с. 229]. С одной стороны, Юм противопоставляет случайность и причинность, а с другой — считает их неразделимыми. «Несмотря на прямую противоположность случайности и причинности, мы тем не менее не можем представить себе ту комбинацию шансов, которая требуется для того, чтобы дать одному случаю перевес над другими, не предположив, что случайности перемешаны с причинами... Если мы не допустим, что существуют некоторые причины, заставляющие игральные кости падать, сохранять при падении свою форму и ложиться на какую-либо из своих сторон, то мы не сможем делать никаких исчислений относительно законов случая» [Там же, с. 230]. Далее Юм рассматривает пример с бросанием игральной кости, на четырех сторонах которой одинаковое число очков, а на остальных двух — другое.

Итак, по Юму, случайность является отрицанием причины, что порождает в уме полное безразличие. Но при таком подходе нельзя прийти ни к какому исчислению. Поэтому к случайностям должны быть примешаны причины, только тогда мы можем рассматривать различные комбинации шансов. И далее, в некотором смысле противореча самому себе, Юм говорит: «То, что профаны называют случайностью, есть не что иное, как тайная и скрытая причина» [Там же, с. 234]. Юм подчеркивает, что «Невозможно доказать с достоверностью, что дело должно кончиться в пользу именно той стороны, которая располагает преимущественным числом шансов» [Там же, с. 230].

Далее он подробно рассматривает бросание игральной кости, при этом он останавливается на свойствах, которыми должна обладать кость. Этот вопрос в дальнейшем будет обсуждаться неоднократно. По Юму, кость должна обладать тремя свойствами: 1) существуют причины (тяжесть, плотность, форма и т. п.), которые заставляют кость падать, при этом она сохраняет свою форму и ложится вверх одной из своих сторон; 2) имеет совершенно одинаковые стороны; 3) каждая сторона как-то отмечена. «Этими тремя особенностями исчерпывается вся природа игральной кости» [Там же, с. 232].

Хотя Юм и пишет, что «мы можем основывать аргументацию на одном-единственном опыте, если последний должным образом подготовлен и исследован» [Там же, с. 235], но он явно склоняется к статистическому подходу к вероятности. Он пишет о том, что мы пользуемся прошлым в качестве мерила будущего, что мы в бу-

дущем ожидаем ту же последовательность объектов, которую мы наблюдали в прошлом. «Прошлые события могут возникнуть снова, и мы заключаем, что при повторении они сочетаются в той же пропорции, как и раньше» [Там же, с. 238]. В подтверждение этому он рассматривает следующий пример. «Предположим, например, что после долгих наблюдений я заметил следующее: из двадцати кораблей, отправляющихся в плавание, возвращаются только девятнадцать. Предположим, что в данную минуту двадцать кораблей выходят из гавани; я распространяю свой прошлый опыт на будущее и представляю себе, что 19 из них возвратятся невредимыми, а один погибнет» [Там же, с. 239].

Юм говорит о том, что каждый опыт добавляет сведения о рассматриваемом явлении, так же как новый мазок кисти добавляет «силу краскам».

К статистическому подходу к вероятностным вопросам Юм возвращается неоднократно. «Все наши заключения о вероятности причин основаны на перенесении прошлого на будущее» [Там же, с. 242]. «Когда наш ум делает заключение относительно какого-нибудь только вероятного факта, он оглядывается назад, на прошлый опыт» [Там же, с. 245].

Вопрос о переходе случайности в необходимость в математической форме выражался в вопросе о том, какой вероятностью можно пренебречь, сколь большую вероятность можно считать за достоверность. Юм по этому вопросу пишет: «Нет вероятности столь большой, чтобы она не допускала противоположной возможности, так как в противном случае она перестала бы быть вероятностью и превратилась в достоверность» [Там же, с. 240].

Понятие равновероятности не такое простое, как может показаться с первого взгляда. Понятия равносильности, равного веса и т. п. хотя можно определить, не прибегая к понятию силы и веса, но они требуют некоторого прибора (весы, динамометр и т. п.). Равновероятность также можно определить без понятия вероятности, и здесь, как и в других случаях, требуется некоторый «прибор». Роль прибора в случае равновероятности может играть симметрия, достаточно длительные наблюдения (статистический подход) и некоторые другие соображения.

Юм рассматривает одновременно с вероятностью и возможность. Под возможностью он понимает вероятность противоположного события. Кроме того, у Юма имеются еще и шансы, которые чаще всего рассматриваются как равновозможные исходы. Вскрывая связь между этими понятиями, Юм пишет: «Все единичные случаи совершенно равны и единственное обстоятельство, которое может придать какому-нибудь случайному событию преимущество по сравнению с другими, есть большее число шансов... Возможность... состоит из частей, однородных как друг другу, так и тем частям, которые составляют противоположную вероятность» [Там же]. И в другом месте: «Каждой вероятности соответствует противоположная возможность. Возможность эта состоит из ча-

стей, совершенно одинаковых по природе с составными частями вероятности» [Там же, с. 241]. Естественно понимать под составными частями равновозможные случаи, благоприятствующие данному событию или нет.

«Составные части вероятности и возможности, будучи одинаковыми по своей природе, должны производить одинаковые действия... Однако, хотя эти части одинаковы по природе, они очень различны по своему количеству и числу» [Там же, с. 242]. По Юму, вероятность события A и вероятность противоположного события $\bar{A}$ достаточно полно характеризуют событие. «Представление, доставляемое вероятностью и возможностью, в обоих случаях полно, совершенно и охватывает объект со всеми его частями» [Там же, с. 242]. Юм не замечает, что сумма вероятностей A и $\bar{A}$ равна единице ($p + q = 1$) и что по вероятности события p легко определить вероятность противоположного события q.

Как мы видим, находясь в границах знаний, которые уже к тому времени были хорошо известны математикам, Юм делает целый ряд глубоких и интересных замечаний, которые оказали влияние на формирование вероятностных понятий, в том числе и на формирование вероятности. В первую очередь это относится к статистическому подходу Юма к вероятностным понятиям.

Четкого взгляда на вероятность в то время не существовало, поэтому, применяя ее к традиционным вопросам, все под вероятностью понимали примерно одно и то же. Но как только делались попытки применения вероятности к более широкой области, сама вероятность начинала принимать расплывчатые, неопределенные, а часто и фантастические очертания.

Юм, считая, что вероятность применима всюду, рассматривает самые различные вероятности.

«Помимо... двух видов вероятности, происходящих от *несовершенного* опыта и от *противоположных* причин, существует еще третий вид, проистекающий из *аналогии* и отличающийся от первых двух в нескольких существенных отношениях» [Там же, с. 247]. Кроме этих трех видов вероятностей, которые «признаются философами и допускаются ими в качестве различных оснований веры и мнения», существуют, по Юму, еще много других вероятностей. Один из этих видов вероятности характеризуется тем, что «аргумент, который мы основываем на каком-нибудь вспоминаемом нами факте, бывает более или менее убедительным в зависимости от того, недавно или давно совершился этот факт» [Там же, с. 248]. Юм в этот вид вероятности вводит время, так как считает, что «опыт, произведенный недавно и еще свежий в памяти, действует на нас больше, чем опыт, до некоторой степени позабытый» [Там же, с. 249]. В результате этого достоверные знания переходят в вероятные. «Хотя наши заключения, основанные на доказательствах из опыта, значительно отличаются от заключений, основанных на вероятности, однако первый вид заключений часто незаметно переходит во второй, единственно благодаря наличию множе-

ства связанных друг с другом аргументов» [Там же]. Так, Юм утверждает, что все факты древней истории утратили свою очевидность, так как они передавались от одного автора к другому неоднократно, а это приводит только к вероятным заключениям, причем их вероятность все время уменьшается. Еще один вид вероятности, по Юму, «проистекает из *общих правил*, часто необдуманно составляемых нами» [Там же, с. 252]. Юм рассматривает вероятности, основанные на аналогии, затем он строит цепочку вероятности. Так как человек в своих вероятностных выводах может ошибаться, то возникает новый вид вероятности для исправления первого и т. д.

Мы полностью согласны с Нарским [Нарский, 1965, с. 818], что «классификация видов вероятности Юмом несколько запутана и противоречива». Несмотря на это, Нарский приводит схему основных знаний вероятности у Юма, в которой выделены в основном два вида вероятности: вероятность случайностей и вероятность причин. Нарский пишет: «*Вероятность случайностей* Юм понимал в смысле статистической закономерности, а *вероятность причин* — как приблизительное знание коррелятивных зависимостей» [Там же]. Но, к сожалению, Нарский не останавливается на том, как он пришел к такому выводу.

В других своих работах «Исследование о человеческом познании», «Исследование об аффектах» Юм как бы забывает свою классификацию вероятностей («запутанную и противоречивую») и говорит о других видах вероятностей. Так, например, в «Исследовании о человеческом познании» (1748) Юм делит все аргументы на «демонстративные доказательства, доказательства из опыта и вероятности» [Юм, 1965б, с. 58]. Он говорит: «В мире не существует ничего подобного *случайности*» [Там же], случайность есть мера нашего незнания, а ее характеристикой является вероятность. При этом он отдает предпочтение вероятности, основанной «на преобладании шансов одной из сторон, и, по мере того как это преобладание растет и превосходит противоположные шансы, вероятность возрастает в той же пропорции, порождая еще бóльшую степень веры, или согласия, по отношению к той стороне, которая, как мы замечаем, преобладает» [Там же, с. 58].

Затем Юм рассматривает вероятность причин. Он говорит, что есть причины, которые производят всегда одно и то же действие: «Огонь всегда жег, а вода всегда заставляла захлебываться всякого человека, порождение движения посредством толчка и тяготения — всеобщий закон, до сих пор не допускавший ни одного исключения. Но есть другие причины, действие которых более неправильно и недостоверно: ревень не всегда оказывался слабительным, а опиум — усыпляющим средством для каждого, кто принимал эти лекарства» [Там же, с. 60]. Для того чтобы делать выводы из таких причин, и служат вероятности причин. При этом мы переносим прошлое на будущее, т. е. пользуемся статистическим методом. «Перенося прошлое на будущее, чтобы определить

действие, которое окажется результатом какой-нибудь причины, мы, по-видимому, переносим различные события в той же пропорции, в какой они проявлялись в прошлом» [Там же, с. 61]. В связи с вероятностью Юм рассматривает вопрос о свидетельских показаниях. В «Исследованиях об аффектах» Юм останавливается на влиянии различных вероятностей на такие состояния человека, как страх, горе и т. п. И тут же говорит о различных вероятностях. «Вероятность бывает двух родов: или объект сам по себе в действительности недостоверен и существование и несуществование его зависит от случая, или объект сам по себе достоверен, но наше суждение о нем недостоверно, ибо мы находим целый ряд доказательств „за" и „против"» [Там же, с. 176].

Мы остановились несколько подробнее на взглядах Юма на вероятность, потому что он в своих трудах отводит этому вопросу довольно много внимания и, кроме того, его позиция типична для философов XVIII в. Обсуждение было плодотворным в том случае, если авторы подтверждают свои выводы математическими знаниями. Если же они отрывались от этой базы, их выводы оказывались бесперспективными и скоро забывались.

Пока Юм базировался на элементарных свойствах вероятности, он выдвинул и отстаивал взгляды о том, что вероятность — это прежде всего статистическое понятие. Он обсуждал такие актуальные вопросы, как вопрос о грани между вероятным и достоверным, о переходе вероятных знаний в достоверные и, наоборот, достоверных в вероятные и т. п. Но как только он покидал свою элементарную вероятностно-математическую базу, он начинал путаться в нескончаемом количестве вероятностей, их определениях и применениях. Сейчас все они представляют только исторический интерес, как пример возникновения во многом беспочвенных понятий, оторванных от других разделов науки, и в первую очередь математики, и не оказавших влияния на формирование понятия вероятности.

12. Вероятность у Лапласа

П. С. Лаплас (1749—1827) начал свою научную деятельность в конце XVIII в. В 1773 г. его избирают адъюнктом Парижской академии наук, а с 1785 г. он полноправный ее член. Относительно общественной деятельности и политических взглядов Лапласа в работах, посвященных ему, говорится довольно часто. Общепринятым считается, что «политические умонастроения Лапласа менялись всегда в такт со всеми вариантами режима во Франции, начиная от Конвента и вплоть до Реставрации 1815 г.» [Научное наследство, 1948, с. 824]. О наших возражениях против этой точки зрения см. [Майстров, 1974]. В этой работе мы пришли к выводу, что политические взгляды Лапласа если и менялись, то не очень сильно: он все время был монархистом, то считая конституционную форму правления во главе с просвещенным монархом

самой лучшей формой правления, то примыкая к ультрароялистам.

Рассмотрим его общие методологические установки, которые, пожалуй, наиболее ярко изложены в его «Опыте философии теории вероятностей» [Лаплас, 1908].

Вначале Лаплас останавливается на соотношении случайного и необходимого. Согласно воззрениям Лапласа, в природе существует лишь необходимость: «Кривая, описанная простою молекулою воздуха или пара, определена так же точно, как и орбиты планет, разницу меж ними делает только наше незнание» [Там же, с. 11]. «Все явления, даже те, которые по своей незначительности как будто не зависят от великих законов природы, суть следствия столь же неизбежные этих законов, как обращение солнца» [Там же, с. 8]. Эту мысль он повторяет и в других работах. «Кривая, описанная легким атомом, который как бы случайно носится ветрами, направлена столь же точно, как и орбиты планет» [Лаплас, 1861а, с. 175].

Вот еще более категорическое заявление: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел вселенной наравне с движениями легчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором» [Лаплас, 1908, с. 9].

Это ярко выраженная позиция детерминизма, который был тогда распространен. В дальнейшем этот детерминизм стали связывать почти исключительно с Лапласом, хотя он встречается у многих ученых и до него, в частности у Я. Бернулли. «С именем Лапласа связан тот детерминизм, который был столь характерной чертой естественнонаучных представлений его эпохи» [Капица, 1973, с. 133].

Лаплас рисует «идеальное» состояние науки, но наука, которая пыталась бы объяснить и установить траекторию отдельной молекулы со всеми ее случайными отклонениями, «была бы уже,— пишет Энгельс,— не наукой, а простой игрой», и даже «случайность не объясняется здесь из необходимости: скорее, наоборот, необходимость низводится до порождения голой случайности» [Маркс, Энгельс, т. 20, с. 534].

По идее Лапласа состояние мира в данный момент времени определяется бесконечным числом параметров, подчиненных бесконечному числу дифференциальных уравнений. Если бы некий всеобъемлющий ум мог записать все эти уравнения и их проинтегрировать, то, по Лапласу, он мог бы с полной точностью предвидеть всю эволюцию мира на протяжении бесконечного времени.

Однако ни введение бесконечного числа параметров, ни описание состояния непрерывных сред при помощи функций от точки

пространства не являются адекватным отображением бесконечной сложности реальных явлений.

Изгоняя полностью случайность, Лаплас должен был определить вероятные события, не опираясь на случайность. Он считает те события вероятными, о которых мы не все знаем. «Факт... получает различную степень вероятия, смотря по обширности знаний» [Лаплас, 1908, с. 13]. Лаплас вводит чисто субъективный признак равновозможности событий, полагая, что два события равновозможны, если нет никакого основания считать наступление одного из них более возможным, чем наступление другого.

Считая, что о многих вещах и явлениях мы не все знаем, Лаплас предлагает применять теорию вероятностей ко всем вопросам естествознания и жизни общества.

Так, например, в своей книге он пишет: «Будем изменять лишь крайне осторожно наши учреждения и обычаи, к которым мы давно уже применились. Мы хорошо знаем по опыту прошлого неудобства, которые они представляют, но мы не знаем, как велико будет зло, которое может причинить их изменение. При такой неизвестности теория вероятностей предписывает избегать всякого изменения: особенно следует избегать внезапных изменений» [Там же, с. 106].

Лаплас призывает к повиновению: «В роде человеческом сильные личности испытывают истинное счастье от господства над слабыми, которые испытывают не меньше счастья, повинуясь им» [Там же, с. 167—168]. Он выступает против суровых приговоров: «Мягкость судебных приговоров тем более вероятна, чем многочисленнее состав суда и просвещеннее судьи. Поэтому следовало бы, чтобы апелляционные суды удовлетворяли этим двум условиям» [Там же, с.127]. И далее звучит как насмешка разбор случая, когда в судебном процессе занят 1001 судья.

Необходимость многочисленного состава суда Лаплас основывал примерно на следующих соображениях. Предположим, что судьям необходимо ответить относительно виновности подсудимого «да» или «нет». Если решение, принимаемое каждым судьей, независимо, то в данном случае был бы применим закон больших чисел в форме Бернулли и вопрос о виновности или невиновности подсудимого считался бы решенным правильно, если за него подано большинство голосов судей. Следовательно, если судебный трибунал состоит из достаточно большого числа судей и решает вопросы большинством голосов, то он практически не допускал бы ошибок в своих решениях.

Эти рассуждения неоднократно подвергались критике. Например, С. Н. Бернштейн пишет: «Здесь не принимается во внимание, что все судьи судят на основании тех же самых свидетельских показаний и вещественных доказательств, так что в простом деле все они более или менее одинаково разберутся, а если запутанные обстоятельства вводят в заблуждение одних, то и для других судей ошибка становится более вероятной, иначе говоря, в слу-

чае судебного приговора отсутствует условие независимости между суждениями отдельных судей, и это коренным образом изменяет положение вещей» [Бернштейн, 1946, с. 179].

Мы не будем останавливаться специально на философских взглядах Лапласа, они в какой-то мере освещены в нашей работе [Майстров, 1967]. Отметим только некоторые моменты.

Лаплас признавал наличие внешнего материального мира, существующего вне и независимо от нашего сознания. Внешний мир, по Лапласу, мы познаем посредством органов чувств, критерием знаний является соответствие с наблюдениями. Лаплас считал, что явления и сущность не совпадают и что задача науки состоит в том, чтобы исправить «иллюзии и обманы чувств, познавая истинные предметы в их обманчивых формах проявления» [Лаплас, 1861а, с. 5]. Но с точки зрения Лапласа, познать сущность всех явлений невозможно.

Особое место Лаплас отводил закону всемирного тяготения. В предисловии к «Небесной механике» (1799) он писал: «В конце прошлого века Ньютон опубликовал свое открытие всемирного тяготения. С тех пор математикам удалось все известные явления мироздания свести к этому великому закону природы, и, таким образом, достичь в астрономических теориях и таблицах неожиданной точности» [Лаплас, 1973, с. 134]. И в другом месте: «Этот великий закон природы представляет небесные явления вплоть до их самых малых деталей» [Научное наследство, 1948, с. 733]. Лаплас считал, что закон всемирного тяготения не только «представляет все небесные явления в их мельчайших подробностях», но и объясняет все или почти все явления природы: «твердость, кристаллизация, преломление света, возвышение и понижение жидкостей в волосных пространствах и вообще все химические соединения представляют результаты сил» [Лаплас, 1861б, с. 2], которые Лаплас называет частными притяжениями, считая их какими-то частными случаями закона всемирного тяготения.

Причины всех явлений Лаплас сводит к небольшому числу законов, которые полностью познать невозможно. Одним из таких законов и является закон всемирного тяготения. Таким же законом он считает нормальный закон распределения вероятностей, к которому сводятся, по его мнению, все закономерности любой области массовых явлений. Исходя из такого взгляда, Лаплас переоценивал значение теории вероятностей в науке и в жизни общества. Так, Лаплас писал: «Замечательно, что наука, которая начала с рассмотрения азартных игр, обещает стать наиболее важным объектом человеческого знания... Ведь большей частью важнейшие жизненные вопросы являются на самом деле лишь задачами из теории вероятностей» (цит. по: [Кац, 1967, с. 83]). И в другом месте: «Нет науки, более достойной наших размышлений и результаты которой были бы более полезны» [Лаплас, 1973, с. 140].

Вероятность является основным понятием такой всеобъемлющей, по Лапласу, науки. Поэтому он уделяет этому понятию большое внимание. В начале XIX в. Лапласом [Laplase, 1812] было систематически введено в научный обиход так называемое классическое определение вероятности: вероятность события есть отношение числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев, причем все случаи предполагаются равновозможными. Это определение сводит понятие вероятности к понятию равновозможности (равновероятности). Равновозможность считается основным понятием и не подлежит определению. Лаплас дает следующее объяснение вероятности: «Я стремлюсь определить вероятность причин и следствий при большом числе указанных событий и отыскать законы, согласно которым эта вероятность приближается к своему пределу по мере того, как множатся эти события» [Лаплас, 1973, с. 139].

Это определение вероятности ($p = m/n$) в дальнейшем было названо классическим. Оно было господствующим в течение почти всего XIX в. Считалось, что к нему сводятся все другие определения. Несмотря на такое отношение к классическому определению, довольно скоро были замечены некоторые его недостатки. Прежде всего указывалось на порочный круг, так как в основу определения вероятности здесь положено в несколько измененной форме, по существу, то же самое понятие (равновозможность, равновероятность). Ведь о равновероятности мы можем сказать только следующее: события будут равновероятны, если их вероятности равны.

На первый взгляд такое возражение очень серьезно. Но равновероятность в некоторых случаях можно определить, не прибегая к вероятности. Аналогично мы можем определить иногда, что два тела имеют одинаковый вес, не прибегая к их взвешиванию, а установив, что рычажные весы находятся в равновесии, когда эти тела положены на разные чашечки.

Для некоторых явлений даже такое (классическое) определение вероятности отражает объективную сторону дела. В таких случаях хотя равновероятность и не определяется, она является следствием в первую очередь симметричности. Вероятность выпадения, например, любой грани правильной игральной кости равна $^1/_6$, т. е. здесь выпадение любой грани равновероятно, и это является результатом симметричности кости.

Основные недостатки, связанные с этим определением, состоят в другом.

Часто, начиная с Лапласа, это определение трактуют субъективно, считая, что равновероятными являются те события, о которых нам одинаково неизвестно, или если мы не можем дать предпочтение одному событию перед другим, т. е. считаем их одинаково правдоподобными. Более того, Лаплас ввел так называемый принцип недостаточности оснований. Этот принцип состоит в том, что если вероятность события неизвестна, то мы для ее значения

назначаем некоторое число, которое нам представляется разумным. В случае если мы имеем несколько событий, которые составляют полную систему, но не знаем вероятности каждого события в отдельности, то мы считаем, что все эти события равновероятны.

Лаплас, например, говорит, что если монета несимметрична и мы не знаем, какая сторона выпадает чаще, «то вероятность выпадения креста при первом бросании все еще будет $^1/_2$, потому что при нашем незнании стороны, которой благоприятствует это неравенство, вероятность простого события настолько же увеличивается, если это неравенство ей благоприятствует, насколько она уменьшается, если это неравенство ей не благоприятствует». По поводу этого места Б. В. Гнеденко делает следующее замечание:

«Понятно, что ни при первом, ни при втором и ни при каком бросании монеты нельзя говорить, что вероятность выпадения монеты равна половине: она попросту неизвестна. Определение же ее, оценку ее значения нужно производить не такими сомнительными средствами, отнимающими у самого понятия вероятности его объективную роль числовой характеристики определенных реальных явлений» [Гнеденко, 1950б, с. 105].

Определение вероятности через равновозможность, понимаемую в чисто субъективном смысле одинакового правдоподобия для познающего субъекта, является разновидностью определений вероятности через степень уверенности познающего субъекта. Такая трактовка получила наибольшее распространение в период господства в науке механистического детерминизма, с точки зрения которого основой вероятности является субъективный момент — незнание. Вероятность считалась мерой нашего незнания.

Классическое определение вероятности при переходе от простейших примеров, связанных в первую очередь с вопросами азартных игр, к рассмотрению более сложных задач из различных областей науки и техники наталкивается на непреодолимые трудности. В таких задачах возникает вопрос, как определить, равновозможные перед нами случаи или нет. Кроме того, возникает проблема о возможности нахождения способа выделения равновозможных случаев, а это часто оказывается нельзя сделать. Например, как указать, где равновозможные случаи при определении вероятности дожития определенного человека до 70 лет или при определении какой-нибудь другой подобной вероятности.

При правильной трактовке классическое определение вероятности применимо к очень небольшому классу явлений. Попытка же распространить это определение на более широкий класс явлений (или даже на все явления) никакого успеха не имела.

Сделаем еще одно замечание относительно определения Лапласа. Если взять идеальную кость, то вероятность выпадения всех граней будет одинакова, мы будем иметь равновозможные случаи. Однако в этом случае грани будут неразличимы, так как любая надпись, окраска и т. п. нарушают симметрию, и установить, какая именно грань выпала, невозможно. Таким образом, налицо своего

рода принцип дополнительности: чем равновероятнее события, тем меньше их различимость, и наоборот. Следовательно, классическое определение вероятностей содержит порочный круг, так как если мы говорим о вероятности выпадения определенной грани (например, с шестеркой), то у нас уже нет равновероятности, которая (по классическому определению) должна быть для этого налицо.

Лаплас доказал предельную теорему, одну из центральных теорем теории вероятностей [Laplase, 1812]. Теорема Лапласа

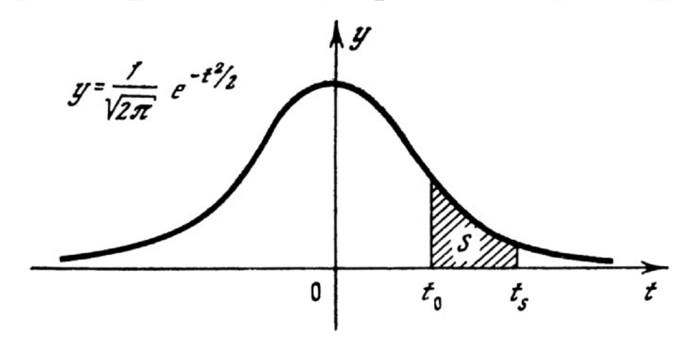


Рис. 4

относится к распределению отклонений частоты появления события при независимых испытаниях от его вероятности. В современной формулировке интегральная теорема Лапласа имеет следующий вид.

Если производить ряд повторных независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A равна p $(0 < p < 1)$, то вероятность P того, что число m наступления события заключено между $a = np + t_0\sqrt{npq}$ и $b = np + t_s\sqrt{npq}$, имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{t_0}^{t_s} e^{-t^2/2}dt$, когда n бесконечно возрастает. Это можно записать короче:

$$\lim_{n\to\infty} P\,(a \leqslant m \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{t_0}^{t_s} e^{-t^2/2}dt,$$

где

$$t_0 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \qquad t_s = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}.$$

Теореме Лапласа можно дать очень простое геометрическое истолкование. Предел вероятности $P\,(a \leqslant m \leqslant b)$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2},$$

которая называется кривой вероятностей, снизу осью абсцисс и с боков прямыми $t = t_0$ и $t = t_s$ (рис. 4). Для удобства вводится в

рассмотрение функция

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-x^2\,2} dx,$$

которую называют функцией Лапласа [1]. С ее помощью теорема Лапласа записывается в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} P(a \leqslant m \leqslant b) = \frac{1}{2}[\Phi(t_s) - \Phi(t_0)].$$

Из теоремы Лапласа, оценивающей распределение вероятностей частоты, вытекает как следствие теорема Я. Бернулли. Именно таким путем, как следствие из своей теоремы, доказал теорему Я. Бернулли в 1738 г. Муавр (для $p = q = 1/2$).

Случайные величины, для которых выполняется интегральная теорема Лапласа, считаются нормально распределенными, а кривая

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

называется кривой нормального распределения вероятностей.

Сам Лаплас использовал нормальное распределение как универсальное распределение вероятностей случайных величин.

В своей книге [Laplase, 1812] Лаплас обсуждает и решает большое число разнообразных вопросов. Так, касаясь морального ожидания, Лаплас говорит, что человек, лишенный всякого имущества, обладает способностями, знанием, силой и т. п., что равносильно некоторому капиталу.

Лаплас, неправомерно используя формулу Байеса, подсчитал, что вероятность того, что событие, которое наблюдалось m раз подряд, повторится при k следующих наблюдений, равна $p = (m + 1)/(m + k + 1)$. В частности, Лаплас рассматривает следующий пример. Он предполагает, что ежедневные наблюдения над восходом Солнца продолжаются уже 5 тысяч лет, что составляет 1 826 250 дней. Вероятность того, что Солнце взойдет еще раз после 5 тысяч лет наблюдений, будет равна, по Лапласу,

$$\frac{1\,826\,250 + 1}{1\,826\,250 + 1 + 1} = \frac{1\,826\,251}{1\,826\,252} = 1 - \frac{1}{1\,826\,252},$$

здесь $m = 1826250$ и $k = 1$.

Иногда в литературе функцией Лапласа называют

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2}\Phi(t),$$

значение которой будет соответственно в два раза меньшим, или, что чаще всего, — функцию

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx.$$

В другом примере Лаплас говорит, что если 11 планет (в числе планет Лаплас считает и крупнейшие астероиды, известные к тому времени) обращаются вокруг Солнца в одну сторону, то вероятность, что двенадцатая планета, если такая будет открыта, тоже будет вращаться в эту сторону, равна 12/13, а вероятность, что существует причина этого, равна $\frac{2^{12}-1}{2^{12}} = \frac{4095}{4095}$.

Выше мы уже указывали на несостоятельность подобных расчетов. Феллер по поводу примера Лапласа о вычислении вероятности завтрашнего восхода Солнца замечает: «Предполагаемый восход Солнца 5 февраля 3123 года до н. э. ничуть не более достоверен, чем то, что Солнце взойдет завтра: у нас совершенно одинаковые основания верить в эти события» [Феллер, 1967, с. 94].

Лаплас является выдающимся математиком, физиком и астрономом. Ему принадлежат фундаментальные работы по всем этим областям.

В теории вероятностей он впервые систематически изложил все основные теоремы, доказал теоремы, которые сейчас называются теоремами Муавра — Лапласа, построил теорию ошибок наблюдений и метод наименьших квадратов, использовал основные теоретические результаты для практических положений [1]. Авторитет Лапласа в науке был почти непререкаем. Поэтому взгляды Лапласа на теорию вероятностей и вероятность оказали существенное влияние на многих ученых XIX в. Они оказали влияние на все развитие теории вероятностей.

Приведем некоторые примеры, когда исследователи XIX в. почти дословно повторяли позиции Лапласа.

«В мире нет ничего случайного... всякое явление, великое и малое, имеет зародыш в другом, ему предшествующем. Но трудность заметить эту зависимость явлений, недостаток наблюдений и опытов часто не допускают наши познания до степени достоверности. Таково происхождение вероятности». Вероятность «показала, что все явления, какие только были наблюдаемы, действительно соединены с великими законами бытия, только для нас незримыми звеньями» [Зернов, 1843, с. 6—7].

Буняковский дает такое определение вероятности: «*Вероятностью* какого-либо события называется отношение числа равновозможных случаев, *благоприятствующих* событию, к числу *всех возможных* случаев» [Буняковский, 1840, с. 84].

Интересно отметить, что в другой работе Буняковский вероятность определяет как степень доверия: «Степень же доверия к какому-либо численному выводу называется его вероятностью» [Буняковский, 1846, с. 38].

В других местах этой работы он называет вероятность «ме-

[1] Лапласу и его творчеству посвящена обширная литература (см., например, [Андроновы, 1930; Воронцов-Вельяминов, 1937; Литвинова, 1892; David, 1963; Newman, 1954] и др.).

рой ожидания», «мерой доверия» и т. п. Для подсчета же численного значения этой меры нужно брать отношение случаев, как это сказано в первом определении. При этом случаи предполагаются равновозможными, «т. е. мы должны находиться в одинаковой нерешимости в отношении к появлению которого бы то ни было из них» [Там же, с. 39].

Марков в своем известном труде [Марков, 1924] дает такое определение равновозможности: «Два события мы называем равновозможными, если нет никаких оснований ожидать одного из них предпочтительно перед другим» [Там же, с. 2]. Чувствуя неубедительность такого определения, Марков к нему делает примечание: «По моему мнению, различные понятия определяются не столько словами, каждое из которых может в свою очередь потребовать определения, как нашим отношением к ним, которое выясняется постепенно» [Там же].

Фактически почти все работы по теории вероятностей до конца XIX в. излагали точку зрения Лапласа.

Наиболее крупным вкладом Лапласа в трактовку вероятности было не его определение, которое также сыграло существенную роль, а доказательство центральной предельной теоремы (интегральная теорема Лапласа), установление нормального закона распределения случайных величин. Теоремы Лапласа вскрывали существеннейшие стороны вероятности, они наряду с законом больших чисел Я. Бернулли определили направление дальнейшего развития теории вероятностей.

Нормальный закон распределения представлял собой одну из первых строго обоснованных закономерностей теории вероятностей, однако абсолютизация Лапласом этого закона была неверной. Другая ошибка Лапласа состояла в том, что, считая историю человеческого общества областью, в которой всецело господствует слепой случай, он предполагал, что теория вероятностей является той наукой, которая исчерпывающе объясняет эту историю. Он считал, что с помощью теории вероятностей можно проанализировать все общественные явления. Исходя из этого, Лаплас, подобно другим математикам XVIII в., пытался применить теорию вероятностей к судебным процессам, к решениям собраний и т. п. Такое необоснованное и ошибочное распространение теории вероятностей имело отрицательное влияние на развитие науки.

Лаплас считал, что в природе существует только необходимость. Мы приводили слова Лапласа из предисловия к «Опыту философии теории вероятностей», ярко выражающие его детерминистические взгляды, доведенные до такой крайности, о которой Ф. Энгельс писал: «До тех пор, пока мы не можем показать, от чего зависит число горошин в стручке, оно остается случайным, а от того, что нам скажут, что этот факт предусмотрен уже в первоначальном устройстве солнечной системы, мы ни на шаг не подвинемся дальше. Более того: такая наука, которая взялась бы проследить случай с этим отдельным стручком в его каузальном сцеплении со все более

отдаленными причинами, была бы не наукой, а простой игрой» [Маркс, Энгельс, т. 20, с. 534].

Дать общую оценку творчеству Лапласа в теории вероятностей довольно трудно. С одной стороны, только после работ Лапласа стало возможным широкое применение научно обоснованных вероятностных методов; его теорема и трактовка вероятности оказали решающее влияние на дальнейшее развитие теории вероятностей. С другой стороны, при трактовке вероятностных проблем Лаплас иногда впадает в ошибки.

Лаплас считал, что его предельная теорема полностью объясняет поведение случайных массовых ансамблей, к которым он относил большинство явлений. Схема его рассуждений сводилась к следующему. Пусть имеется большое число величин, изменяющихся случайным образом, но законы этих изменений нам неизвестны. Тогда оказывается, что результирующая этих случайных величин в ее колебаниях вокруг среднего значения подчиняется одному закону, который Пирсон назвал нормальным законом.

Наряду со всеми крупнейшими достижениями в теории вероятностей Лаплас допускал существенные ошибки в трактовке многих вопросов. Он считал, что история человеческого общества — это та область, в которой всецело господствует случай, поэтому он предполагал, что анализом общественных явлений должна заниматься теория вероятностей. Лаплас считал, что все закономерности любой области массовых явлений полностью сводятся, возможно, к одному нормальному закону, так же как небесные явления сводятся к одному закону всемирного тяготения. Исходя из этой точки зрения, он пытается применить теорию вероятностей к судебным процессам, к решениям собраний и т. п. Такая позиция оказывала отрицательное влияние на развитие науки.

Роль Лапласа в теории вероятностей отражала состояние всей науки. С одной стороны, теория вероятностей достигла несомненных крупных успехов, с другой, из-за неясности ее основных понятий многие ее применения были совершенно не обоснованы.

13. Состояние теории вероятностей перед появлением русской (Петербургской) школы

Развитие теории вероятностей в первой половине XIX в. проходило в столкновении противоречий. Ярким свидетельством этому является творчество Лапласа. Отражением состояния теории вероятностей является и творчество другого крупного ученого С. Пуассона (1781—1840). Математическое наследие Пуассона обширно.

Все свои работы по теории вероятностей он обобщил и объединил в «Исследованиях о вероятности судебных приговоров по уголовным и гражданским делам» [Poisson, 1837].

Пуассон считал, что теория вероятностей применима к оценке правильности решений судов. В решениях по уголовным делам, которые являются основным предметом книги, когда присяжный высказывается, что обвиняемый виновен или невиновен, реальный смысл этого утверждения состоит не в том, что он считает обвиняемого виновным или невиновным, а в том, что он считает или не считает его подлежащим осуждению, т. е. что в соответствии с данными следствия и с данными, вытекающими из прений, он думает, что в интересах общественной безопасности следует наказать обвиняемого и предотвратить путем осуждения рецидива или, напротив, что имеется только весьма малая опасность для общества в оправдании обвиняемого.

Проблема состоит в точном определении вероятности правильности вынесенных решений как по отношению к каждому из обвиняемых, так и по отношению к обществу. Пуассон считал, что, чтобы сделать такое применение теории вероятностей возможным и обоснованным, необходимо дать новый, до сих пор отсутствующий принцип, так как здесь должны учитываться причины, зависящие от желаний и поступков человека. С помощью теоремы Я. Бернулли связываются понятие вероятности с продолжительными однородными наблюдениями. Но Пуассон считал, что теорема Я. Бернулли не дает оснований применять теорию вероятностей к нравственным вопросам, в том числе и к вопросам юриспруденции. Чтобы создать такую основу, Пуассон занялся предельными предложениями теории вероятностей. На этом пути он доказал свою знаменитую теорему, которой дал название «закон больших чисел».

Теорема Пуассона говорит о следующем. Если производится n независимых испытаний, связанных с наступлением или ненаступлением события A с неодинаковой вероятностью наступления события в отдельных испытаниях, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице (или другими словами — к достоверности), можно утверждать, что частота m/n наступления события A будет сколь угодно мало отличаться от средней арифметической $\widetilde{p}$ вероятностей наступления события в отдельных испытаниях. Теорема говорит, что в высказанных условиях

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{m}{n}-\widetilde{p}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема Я. Бернулли является частным случаем этой теоремы, когда вероятности при переходе от испытания к испытанию не изменяются.

Все явления как морального, так и физического порядка, по Пуассону, подчинены этому универсальному закону. Он рассматривал эту теорему не только как математическую, но и как философскую. Она служила основанием для его исследований о верности решений судов; он выдвигает ее как основное положение в применениях теории вероятностей к явлениям нравственного порядка.

В этой же книге [Poisson, 1837] Пуассон установил и другую очень важную теорему.

Известно, что чем больше значение p отличается от $^1/_2$, тем хуже результат асимптотического представления $P_{m,n}$ в виде $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Для того чтобы в этом случае теорема Лапласа давала результат с незначительной ошибкой, необходимо увеличить число испытаний n, что не всегда удобно и возможно. Таким образом, возникает задача отыскания асимптотической формулы, которая была бы специально приспособлена для малых p (или малых $q = 1 - p$). Эта задача была решена Пуассоном. Он нашел, что если $p_n \to 0$ при $n \to \infty$, то вероятность того, что событие появится m раз, стремится к

$$P_{m,\,n} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np_n$. Эта формула Пуассона может использоваться в качестве приближенного выражения для $P_{m,n}$ и при постоянном, но малом p и большом n.

Польский статистик Л. Борткевич в конце XIX в. назвал распределение Пуассона законом малых чисел. Борткевич применял формулу Пуассона к очень редко встречающимся явлениям: смерть от удара копытом лошади, рождение троен и т. п.

В книге Пуассона мы находим формулы, выведенные путем анализа очень большого числа прошлых решений, которые выражают вероятность для любого гражданина быть в будущем, при действии одного и того же законодательства, обвиненным, осужденным или оправданным и т. п.

Успех книги Пуассона был быстрым, ее поддержали математики, подготовленные к таким рассуждениям работами Лапласа, Кондорсе и других. Они считали естественным применять математику, и в частности теорию вероятностей, без необходимых обоснований к юриспруденции, политическим и экономическим наукам.

Но это мнение не было единодушным. Ряд математиков выступили резко против такого применения математики. Они обвиняли Пуассона и его последователей в компрометировании математики недостойными авантюрами. Эта критика распространялась и на Лапласа. Секция анализа Парижской академии расценила подобные вычисления Пуассона как ложные и бессильные; другие доходили до утверждения, что это «вид заблуждения рассудка».

Но были, конечно, и восторженные оценки работы Пуассона. В этой книге «статистики и законоведы найдут глубокомысленные применения математического анализа к разным вопросам, касающимся судопроизводства по гражданским и уголовным делам. Формулы Пуассона заключают в себе две величины, которые зависят от нравственного состояния страны, от состава суда и вида судопроизводства, а также от образованности и искусства судей» [Буняковский, 1846, с. 46].

«В случае дел уголовных геометры принимают положение, что обвинение подсудимого должно быть основано не на проступке его, как мщение, а только как предосторожность — на опасности, какой подвергалось бы общество через избавление его от наказания. Приговор «виновен» должен иметь ... такой смысл: вероятность, что общество подвергается опасности от новых преступлений того же лица, освобожденного от наказания, или других лиц, соблазнившихся этим событием, более той, какую по последней мере можно допустить для его невиновности. Противоположный перевес должен привести к приговору „невиновен"» [Зернов, 1843, с. 77]. Далее Зернов рассматривает пример, в котором фигурируют: вероятность справедливости приговора ($^9/_{10}$), вероятность виновности ($^3/_4$) и т. п.

Пуассон своими работами внес большой вклад как в развитие теории вероятностей, так и в понимание понятия вероятности. Но, исходя из ошибочных позиций, которые возникли в первую очередь из-за отсутствия ясного представления, что же такое вероятность, Пуассон применял необоснованно вероятностные расчеты ко многим, как тогда говорили, «моральным» областям. Это вызвало отрицательную реакцию у многих математиков, что повлекло недоверие к вероятностным методам вообще.

После Лапласа и Пуассона интерес к теории вероятностей пропал. «Ее фактически перестали считать математической дисциплиной» [Кац, 1967, с. 83].

Гнеденко пишет, что «Лаплас и Пуассон завершили большой и плодотворный начальный период развития теории вероятностей, период философского осмысливания первичных понятий этой науки и первых попыток изучения явлений природы ее методами ... Этот период привел на Западе к более чем холодному отношению к теории вероятностей и к настоящему отрицанию возможности посредством ее методов изучать явления природы. Для теории вероятностей на Западе наступил долгий период застоя» [Гнеденко, 1948, с. 394]. Хотя эта характеристика в основном правильна, но она не вытекает из первой половины утверждения о большом и плодотворном периоде развития и философском осмыслении первичных понятий.

В связи с такими путаными позициями Лапласа, Пуассона и других в трактовке основных понятий теории вероятностей ясности никакой не было.

В этот период делаются попытки разобраться в создавшейся ситуации, дать строгое обоснование вероятности и тем самым вывести теорию вероятностей из тупика. Мы остановимся на одной из таких попыток.

В 1843 г. вышла книга О. Курно (1810—1877) «Основы теории шансов и вероятностей» [Курно, 1970]. Курно — видный французский ученый середины XIX в., занимавшийся, кроме математики, философскими, историческими и экономическими вопросами. Курно поставил перед собой задачу: изложить ясно начала теории

вероятностей, в первую очередь выяснить вопрос о том, что из себя представляет вероятность.

О понятии вероятность он пишет: «Термин *вероятность* был источником стольких двусмысленностей, что первоначально мне хотелось от него отказаться» [Курно, 1970, с. 27]. Но, считая, что в своей книге он внес ясность в это понятие, Курно оставляет его, тем более что отказ от принятого термина, по мнению Курно, влечет много неудобств. «Слово *вероятность* имеет еще иные значения, помимо принятых в математике, но все же настолько к ним близких, что в философском труде они не могут быть полностью отделены» [Там же, с. 27—28].

В своем изложении он говорит как о субъективной вероятности, так и о вероятности объективной. «Это было необходимо, чтобы коренным образом разделить два значения термина *вероятность*, которыми пользуются при построении исчисления» [Там же, с. 28]. Кроме понятия вероятности, Курно, как следует уже из заглавия книги, рассматривает еще такое понятие, как шанс.

После того как Курно познакомил Пуассона с наброском плана своей книги, последний написал ему 16.I 1836 г. письмо, в котором говорится: «Я провел между словами *шанс* и *вероятность* то же различие, что и Вы, и решительно настаиваю на этом различии» (цит. по: [Курно, 1970, с. 29]). Переводчик книги Курно на русский язык Н. С. Четвериков так объясняет [Там же, с. 46], что Курно понимает под шансами и вероятностями:

«Курно различает понятие «шансы» (chances) и вероятность (probabilité) ..., понимая под шансами — статочности, или случаи, т. е. случайные комбинации причин, при которых событие может наступить, но может и не наступить и которые между собою равновозможны. Шансы всегда выражаются целыми числами. Под вероятностью Курно понимает отношение числа шансов, благоприятных событию, к общему числу шансов». Сам Курно термин «шанс» впервые употребляет в такой фразе: в азартных играх «правила игры определяют некоторое число комбинаций, или предположений, которые все могут осуществляться без того, чтобы мы имели какие-либо основания ожидать реализации одной из них предпочтительнее перед другими. Эти предположения или комбинации называются шансами» [Там же]. Мы назвали бы их всевозможными равновозможными исходами. После этого Курно определяет вероятность. «Нас интересует ... исключительно лишь *отношение числа шансов, благоприятствующих событию, к общему числу всех шансов* ... его называют ***математической вероятностью*** или просто вероятностью события» [Там же, с. 47].

Курно довольно подробно рассматривает геометрическую вероятность, в частности пример попадания биллиардного шара в определенный отрезок борта. Рассматриваются и другие задачи. Считая, что в природе почти все изменения происходят непрерывно, а не скачками, Курно отводит геометрической вероятности первостепенное значение.

«Мы определили математическую вероятность как отношение числа благоприятствующих событию шансов к общему их числу, что предполагает, что шансы можно *занумеровать* и что они представляют собою определенное количество *дискретных* единиц. Это определение надо модифицировать так, чтобы сделать его применимым к тем случаям, когда число шансов бесконечно велико и изменение шансов совершается путем непрерывного перехода; в последнем случае числа необходимо заменить непрерывными величинами. Среди всех непрерывных величин наиболее наглядной представляется протяженность. Поэтому мы можем дать математической вероятности такое определение: *вероятность есть отношение протяженности шансов, благоприятных какому-либо явлению, к общей протяженности всех шансов.* Однако термин *протяженность*, вообще говоря, применим лишь по ассоциации, хотя им можно было бы пользоваться и в подлинном смысле, причем вероятность непосредственно определялась бы отношением между геометрическими величинами» [Там же, с. 56].

Курно, кроме того, вводит абсолютную вероятность и относительную вероятность.

Курно отмечает, что у Я. Бернулли «термин *вероятность* не имеет иного значения, кроме математического, получаемого им по определению [12]» [Там же, с. 71], причем определение [12] гласит, что вероятность есть «*отношение числа шансов, благоприятствующих событию, к общему числу всех шансов*» [Там же, с. 47].

Рассматривая грань между вероятным, невозможным и достоверным, Курно пишет: «*Физически невозможное событие — это такое событие, математическая вероятность которого бесконечно мала*» [Там же, с. 89]. И далее: «Понятие физической невозможности существенно отличается от понятия невозможности математической... Вещь, невозможная физически, может считаться возможной математически или метафизически, но в действительности она не осуществляется» [Там же, с. 90]. Связь математических понятий возможности с реальным миром, по Курно, осуществляет теорема Я. Бернулли.

И хотя Курно стремится внести ясность в вероятностные вопросы, он этого не достигает, так как не имеет четкой позиции. Его определения и объяснения нагромождаются друг на друга, и выпутаться из них нет никакой возможности. Несколько раз, говоря о вероятности, Курно приводит новое объяснение этого понятия: он пишет, что мы будем пользоваться словом «вероятность», как синонимом физической возможности, но при этом неясно, идет ли речь об одном испытании или о серии испытаний. «Математическая вероятность становится в таком случае мерой физической возможности» [Там же, с. 91]. «Термин *возможность* выражает нечто *объективное*, тогда как термин *вероятность* в обычном понимании имеет смысл *субъективный*» [Там же, с. 92].

Вероятность имеет относительное значение, «завися отчасти от нашего знания, отчасти от нашего незнания» [Там же, с. 94].

Курно пишет, что теперь «стало ясным фундаментальное различие между вероятностями, существующими объективно, дающими меру возможности явлений, и вероятностями субъективными, отчасти зависящими от объема наших знаний и отчасти от нашего незнания, изменяющимися от одного интеллекта к другому в зависимости от его способности и от сообщенных им данных» [Там же, с. 151—152]. Курно приходит к выводу о необходимости нравственного ожидания, так как «здравый смысл подсказывает ... что значение денежной суммы снижается для того, чье благосостояние возрастает» [Там же, с. 101].

Как мы видим, попытка Курно внести ясность в основные вероятностные понятия не увенчалась успехом. Работой Курно не был указан путь, который вывел бы теорию вероятностей из тупика; Курно не вскрыл новых характерных сторон в самой вероятности.

Поэтому и после работы Курно вероятность продолжали употреблять для оценки не свойственных для нее ситуаций. В этом отношении характерна деятельность бельгийского статистика А. Кетле (1796—1874), о котором в 1869 г. К. Маркс писал: «В прошлом у него большая заслуга: он доказал, что даже кажущиеся случайности общественной жизни вследствие их периодической возобновляемости и периодических средних цифр обладают внутренней необходимостью. Но объяснение этой необходимости ему *никогда* не удавалось» [Маркс, Энгельс, т. 32, с. 495—496]. Не сумев объяснить наблюдаемые явления, Кетле считает, что человеческим обществом в целом, отдельными поступками людей, их склонностями, поведением и способностями управляют вероятностные законы. Меры склонности к преступлению, браку и т. п. Кетле считает математическими вероятностями. Он, например, пишет: «Эту вероятность (0,0884) можно рассматривать как меру видимой склонности к браку живущего в городе бельгийца» [Кетле, 1863, с. 79]. Кетле выдвинул в качестве основной задачи исследования статистики (а вместе с этим и применения вероятности) выяснение характера среднего человека. Согласно Кетле, средний человек является совершенным типом, а отдельные индивиды — это искаженные выражения этого типа.

Неоправданное применение вероятностных рассуждений и методов привело к тому, что к середине XIX в. теория вероятностей зашла в тупик. Ввиду того что не были ясны области ее приложений, стало распространяться мнение, что теория вероятностей не имеет отношения ни к естествознанию, ни к математике.

Выход из создавшегося положения лежал на пути новых методов решения теоретических вопросов, которые аккумулировали в себе практические применения вероятности, запросы практики.

Глава 4

ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XIX И НАЧАЛЕ XX В.

1. Решение вероятностных вопросов в России до работ Петербургской школы

Если не принимать в расчет работ, выполненных в стенах Петербургской академии в XVIII в. (Л. Эйлер, Д. Бернулли), то интерес к теории вероятностей стал проявляться лишь в 20-х гг. XIX в.

По-видимому, впервые вопрос о преподавании теории вероятностей в университетах России был поставлен в Вильнюсе. При содействии И. А. Снядецкого в 1829/30 учебном году впервые в России С. Ревковский (1807—1893) стал читать в Вильнюсском университете курс теории вероятностей. Сохранилась программа этого курса, составленная Ревковским. Она была опубликована в работе Беспамятных [Беспамятных, 1963].

В начале программы идет объяснительная записка. Хотя Ревковский стоит на позиции детерминизма в духе Бернулли — Лапласа, его трактовка этого вопроса несколько самобытна. «Каждое явление в природе является результатом одной из многих сил, действующих согласно некоторому закону. Если эти силы нам известны, тогда можно в некоторых случаях вычислить и заранее предсказать явление, которое должно произойти, совершенно так же, как астрономы предсказывают движение небесных тел, затмения и т. д.

Однако когда силы, вызывающие данное явление, и законы, согласно которым они действуют, нам либо совершенно неизвестны, либо они так разнообразны и сложны, что они не поддаются вычислениям, тогда обнаружение такого явления является гадательным и обычно приписывается Судьбе. Таким образом, судьба своим существованием обязана нашему незнанию или неосведомленности: чем больше мы познаем законов и сил в природе, тем меньше явлений будет зависеть от судьбы. Надежда, что явление, зависящее от судьбы, произойдет, может быть большей или меньшей» (см. [Беспамятных, 1963]).

Мера этой надежды, по Ревковскому, и есть вероятность, которой он дает классическое определение. Затем следует определение теории вероятностей: «Наука, дающая способы точного вычисления величины надежды, или, иначе, вероятности какого-либо явления, есть особая ветвь прикладного анализа, которую мы называем исчислением вероятностей» [Там же]. Далее идет сама программа.

На программу Ревковского дал отзыв М. В. Остроградский. В целом одобрив ее, Остроградский пишет о самой теории вероятностей: «Наука вероятностей есть одно из важнейших приспособлений математического анализа: философия природы обязана ей многими методами, посредством коих из великого числа наблюдений определяются элементы, на коих основаны важнейшие астрономические теории; она подала повод к тем полезным общественным заведениям, известным нам под именем страховых компаний; посредством ее усматриваем мы существование причин, имеющих действия, меньшие, нежели самые погрешности, при наблюдениях встречающиеся. С каждым днем увеличивается влияние сей отрасли анализа, приспособляемой ныне и к самым политическим и нравственным наукам» [Остроградский, 1961, с. 277].

В Московском университете впервые теорию вероятностей в 1850 г. начал читать А. Ю. Давидов (1823—1885). В трактовке основных вопросов Давидов полностью находился под влиянием Лапласа. Следует только отметить его интересную попытку применить вероятностные методы к медицине [Давидов, 1854]. Характер этого применения виден на следующем примере. Пусть в 200 случаях заболеваний некоторый признак появляется 130 раз. По прилагаемой таблице, которая рассчитана исходя из нормального распределения, находим, что вероятности повторения этого признака $^{56}/_{100}$ и $^{74}/_{100}$; так как эти числа больше $^{1}/_{2}$, то делается вывод о возможности считать данный признак симптомом болезни [1].

К первым работам по теории вероятностей в Московском университете следует отнести статью Брашмана «Решение задач по исчислению вероятностей» (1835) и обширную работу Н. Е. Зернова (1804—1862). В 1843 г. Зернов произнес на торжественном собрании в университете речь, которая в расширенном виде была издана отдельной книжкой [Зернов, 1843].

Зернов придерживается взглядов распространенного тогда детерминизма. Любопытно высказывание Зернова о применениях теории вероятностей. «Теория вероятностей в науках естественных указывает законы смертности и народонаселения, через страхование охраняет гражданина от несчастий, между наблюдениями несогласными избирает то, которое должно допустить по преимуществу, руководствует астронома в изыскании уклонений движения светил, которые по малости своей могли бы затеряться между неизбежными ошибками, будучи, однако, весьма важны для науки. Теория вероятностей проникает в храм Фемиды, подавая мерило правды и милости судиям; она может руководствовать законодателя в избрании мер гражданского порядка, оценивая их по замеченным последствиям; она может подавать светильник историку, взвешивая доверенность к преданиям. Наконец, учение о вероятности

---

[1] О А. Ю. Давидове и его работах по теории вероятностей см. [Гатлих, 1912, Луценков, 1888, и др.]

просветляет самую логику» [Там же, с. 7]. Здесь смешаны действительно ценные и научно оправданные применения вероятности и иллюзорные, неоправданные ее применения.

Зернов дает классическое определение вероятности. Любопытно формулируется теорема сложения вероятностей: «Вероятность рода равна сумме вероятностей видов» [Там же, с. 9], хотя теорема умножения формулируется обычным образом.

Зернов вводит, кроме основного понятия вероятности (самостоятельной вероятности), относительную вероятность. «Вероятность событий, рассматриваемых в таком виде, как будто прочие события совсем не имели места, называется верятностью относительного. Относительная вероятность какого-либо события равна частному, происшедшему от деления самостоятельной вероятности того же события на сумму сей последней вероятности и противоположной ей, также самостоятельной» [Там же, с. 9—10].

Это определение сопровождается следующим примером. В сосуде имеется 3 красных, 1 черный и 2 белых шара. Вероятность вытащить красный шар $p_к = {}^3/_6$, белый $p_б = {}^2/_6$, черный $p_ч = {}^1/_6$; это все вероятности самостоятельные. Держат пари относительно появления белого или черного шара, не обращая внимания на красные. Вероятность вытащить белый шар в этих условиях будет ${}^2/_3$, черный ${}^1/_3$. Это, по Зернову, вероятности относительные. Для этих вероятностей справедливы следующие соотношения: ${}^2/_3 = {}^2/_6 : ({}^2/_6 + {}^1/_6)$; ${}^1/_3 = {}^1/_6 : ({}^2/_6 + {}^1/_6)$.

Зернов рассматривает моральное ожидание. Необходимость введения морального ожидания в дополнение к математическому, по Зернову, следует, в частности, из такого примера. Некто имеет 100 руб. Вероятность ему получить или потерять 50 руб. равна ${}^1/_2$. Отношение приобретенных денег к будущему капиталу ${}^{50}/_{150} = {}^1/_3$, а потерянных к настоящему ${}^{50}/_{100} = {}^1/_2$. «Отсюда видно, что потеря этих 50 руб. приносит чувствительно более невыгоды, хотя по математической надежде эта игра справедливая» [Зернов, 1843, с. 25]. Следуя в трактовке морального ожидания за Д. Бернулли, Зернов пишет: «Физическая сила, какие-нибудь способности, даже возможность просить милостыню или делать долги, есть уже капитал, имущество» [Там же, с. 22]. Исходя из морального ожидания Зернов подходит к решению «петербургского парадокса». Он пишет, что математическое ожидание имеет сходство с простыми процентами, а моральное — со сложными.

Зернов считает, что основным применением теории вероятностей служит демографическая статистика и страхование.

В своей книге Зернов попытался осветить все известные ему приложения вероятности. Однако, как правило, он ограничивается лишь пересказом тех или иных основных положений теории вероятностей и ее приложений и почти нигде не высказывает своего мнения по поводу излагаемого материала. Результатом этого явилась неравноценность различных частей книги: с одной стороны, важные применения теории вероятностей к ошибкам измерений к

демографии, с другой — не представляющие научного и практического значения применения вероятности к судопроизводству.

Конечно, такие работы, как работа Зернова, могли привлечь и привлекали интерес к вероятностным вопросам, но никакого идейного толчка для дальнейшего развития теории вероятностей и выяснения сущности вероятности они не могли дать.

В распространении теории вероятностей и возбуждении интереса к ней в России большую роль сыграл выдающийся русский математик В. Я. Буняковский (1804—1889). В 1846 г. вышла его фундаментальная работа «Основания математической теории вероятностей» [Буняковский, 1846]. Во введении к этой книге Буняковский указывает на трудности при ее написании, возникшие из-за отсутствия терминологии на русском языке. «Мне предстоял труд писать на русском языке о предмете, для которого мы не имели установленных употреблением оборотов и выражений» [Там же, с. III]. С этой задачей Буняковский справился блестяще. Введенная им терминология почти без изменений употребляется до настоящего времени. Буняковский указывает, что он широко пользовался при написании книги работой Лапласа [Laplase, 1812]. Он стоит на детерминистической позиции, полностью отвергающей возможность существования случайного.

Приведя цитату из Лапласа о всемогущем уме, Буняковский пишет: «Если бы все данные, от которых событие зависит, были нам известны и если бы сверх того мы были одарены умом, столько проницательным, что могли бы обнять и сообразить взаимные отношения всех этих данных, то безошибочно решили бы вопрос и могли предсказать появление или непоявление события» [Буняковский, 1846, с. 2].

Высказывания Буняковского о вероятности и теории вероятностей довольно расплывчаты. Теорию вероятностей он относит к прикладной математике, а относительно ее общих задач пишет: «Анализ Вероятностей подвергает рассмотрению и численной оценке явления, зависящие от причин не только совершенно не известных нам, но которые даже по нашему неведению не подлежат никаким предположениям» [Там же, с. 1]. О вероятности он пишет следующее: «Правдоподобие при различных обстоятельствах может быть более или менее значительным, и, следовательно, оно, как всякая математическая величина, подлежит измерению и допускает меру. Мера эта в математическом смысле называется вероятностью, а исчисление, занимающееся точным ее определением,— Анализом Вероятностей» [Там же, с. 3]. После этого Буняковский говорит о нравственной достоверности в неясном и расплывчатом рассуждении. Он пишет, что нравственная достоверность «обнаруживается в том случае, когда наш ум, признавая с полным внутренним убеждением какой-либо факт, не может, однако же, утвердить бытие его неоспоримыми доводами ... Для человека с умом здравым истины, нравственно достоверные, должны иметь ту же силу, как и предположения, утвержденные математической достоверностью» [с. 4].

Приступая к изложению теории вероятностей, Буняковский меру вероятности определяет как отношение равновозможных случаев. Причем равновозможными называются такие случаи, «в существовании которых мы были бы, в строгом смысле, в одинаковой нерешимости» [Там же]. Другими словами, здесь высказывается субъективный принцип недостаточного основания, провозглашенный Лапласом.

Буняковский относительно теоремы Я. Бернулли пишет: «Статистики ... основывают почти все свои заключения на этом законе. Таковы результаты их о народонаселении вообще, о местном движении населения, о числе преступников, о плодородии почвы, о вывозе и ввозе товаров и проч. Естествознание, медицина, судопроизводство, одним словом,— все отрасли наших знаний заимствуются этим началом в большей или меньшей мере» [Там же, с. 35]. Как мы видим, Буняковский предполагал очень широкие границы для применения вероятности, слабо их подкрепляя действительными применениями.

По полноте содержания и изложения работа Буняковского была выдающимся произведением по теории вероятностей не только в России, но и в мировой литературе того времени. Но, несмотря на это, она не смогла сыграть роли работы, указывающей выход из трудного положения, в котором находилась теория вероятностей. Это произошло потому, что никакой ясности в принципиальные вопросы, связанные с вероятностью, он не внес, поэтому попрежнему оставались неопределенными границы применимости вероятности, предмет изучения теории вероятностей. Свидетельством этому является XI глава этой же книги [Буняковский, 1846] «Приложение анализа вероятностей к свидетельствам, преданиям, различного рода выборам между кандидатами и мнениями и к судейским определениям по большинству голосов».

Приложения и взгляды, высказанные в этой главе, неоднократно подвергались критике. В частности, на них останавливается А. А. Марков в своей работе [Марков, 1924].

Говоря о расчетах Буняковского, относящихся к вероятности достоверности исторических преданий, Марков пишет: «Во-первых, если событие невозможно, то никакие свидетельские показания не могут сообщить ему даже малой вероятности... Маловероятное событие не станет весьма вероятным от согласного показания таких свидетелей, которые сговорились друг с другом или имеют одинаковые, не вполне точные сведения о предмете их показаний. Наконец, сообщение о событии может доходить к нам не от очевидцев, а через последовательный ряд свидетелей, которые передают то, что они слышали от других. В этом случае удлинение цепи свидетелей, конечно, затемняет совершившееся. Независимо от математических формул, на которых мы не остановимся, не придавая им большого значения, ясно, что к рассказам о невероятных событиях, будто бы происшедших в давно минувшее время, следует относиться с крайним сомнением» [Там же, с. 320].

Буняковский пытался оградить религиозные предания от различных нападок. Он писал: «Некоторые философы в видах предосудительных пытались применять формулы, относящиеся к ослаблению вероятности свидетельств и преданий, к верованиям религиозным и тем поколебать их. Для опровержения их выводов стоит только принять в соображение, что всякое следствие, выводимое из аналитической формулы, не может быть иным, чем только развитием первоначального предположения, на котором формула основана. Если предложение ложно, то и следствия анализа будут ошибочны. Поэтому прежде всего должно разобрать основательно предположение, служащее точкою исхода. Когда этот разбор приведет нас к заключению, что в духовном мире есть такие факты, которые не подчинены физическим законам, тогда все злонамеренные умствования лжефилософов рушатся сами» [Буняковский, 1846, с. 326].

По поводу этого высказывания Марков пишет: «Мы никак не можем согласиться с Буняковским, что необходимо выделить известный класс рассказов, сомневаться в которых он считает предосудительным» [Марков, 1924, с. 320].

Мы обращаем внимание на то, что все эти взгляды Буняковский считал уместным излагать в книге по теории вероятностей.

Кроме своей основной работы по теории вероятностей [Буняковский, 1846], Буняковский написал еще ряд статей, которые в основном относятся к ее приложениям, в том числе и к некоторым вопросам, связанным с суммированием чисел. Отметим, что Буняковский в одной из работ указывает на следующее возможное применение теории вероятностей: «Да позволено будет мне прибавить несколько слов о другом приложении анализа вероятностей, на которое, кажется, никто еще не указывал. Новое применение относится к грамматическим и этимологическим исследованиям о каком-либо языке, также к сравнительной филологии» [Буняковский, 1847, с. 48].

Крупный русский математик М. В. Остроградский (1801—1861), известный прежде всего своими работами по анализу, занимался также вопросами теории вероятностей. Многие его работы в этой области были вызваны в первую очередь практическими потребностями, хотя в них Остроградский часто касается общих методологических вопросов. В работах Остроградского по теории вероятностей ощущается довольно сильное влияние книги Лапласа [Laplase, 1812].

Первая работа Остроградского по вероятностным вопросам была опубликована в 1838 г. В этой работе он рассматривает такой суд, когда судьи не в одинаковой мере обладают правильным суждением. Предположив, что границы для правдивости каждого судьи известны, Остроградский приводит формулы для определения вероятности ошибки суда, состоящего из данного числа судей. Лаплас считал, что вероятности принять ошибочное решение различны в случае, если оно принимается единогласно 12 судьями, и

в случае, если оно принимается большинством в 12 голосов при составе суда в 212 судей. По этому поводу Остроградский пишет: «Выявляют величайшее доверие беспристрастному суду, состоящему из 12 человек, принявшему решение единогласно, но если суд состоит из 212 судей, из которых известно мнение лишь 12, согласных друг с другом, то следовало бы для ориентировки подождать, пока не станет известным мнение большинства. Однако, не зная мнения двухсот судей, мы приходим как раз к случаю, когда суд состоит из 12 человек, единогласно вынесших решение. Откуда берется та большая разница в доверии, которое мы выявляем одному и тому же числу судей, одинаково справедливых и находящихся в одном и том же положении по отношению к нам? Этого различия вовсе не существует, мы впали в ошибку из-за того, что недостаточно углубились в вопрос» [Остроградский, 1961а, с. 66].

Статья Остроградского «О страховании», опубликованная в журнале «Финский вестник» в 1847 г., представляет большой интерес, так как она в основном посвящена философским и методологическим вопросам (статья осталась неоконченной).

В ней содержатся критические замечания по адресу недавно вышедшей книги В. Я. Буняковского [Буняковский, 1846], хотя фамилия автора при этом не приводится.

Статья начинается словами: «Теория страхования не может быть изложена без помощи анализа вероятностей, на котором она основана, и потому мы постараемся сперва дать ясное понятие о том, что такое вероятность» [Остроградский, 1961а, с. 238].

Затем он переходит к критическим замечаниям в адрес Буняковского. «Автор хочет показать, что вероятность, которую он называет правдоподобием, есть величина. Для этого доказательства он старается убедить нас, что правдоподобия могут быть одни других и больше и меньше. Потом, когда приведены все доводы, по его мнению достаточные для полного убеждения, то он заключает, что правдоподобие, как и всякая математическая величина, подлежит измерению и допускает меру.

Итак, по мнению ученого автора, правдоподобие есть математическая величина, потому только что правдоподобия одни могут превосходить и быть меньше других.

Мнение это не совсем правильно. И действительно, не говорим ли мы и, говоря, не ясно ли понимаем, что такой-то ученый совестливей другого, что француз храбрее немца, что читатель благоразумнее писателя и проч. Таким образом, совесть, храбрость, благоразумие и т. д. могут быть и больше, и меньше, следовательно, они суть математические величины, их можно измерять, выражать в числах и производить различные над ними действия. Рассуждая таким образом, круг математических наук весьма бы расширился, могли бы появиться основания математических теорий: бессовестности, нелепости и проч.» [Там же, с. 238].

Понятие вероятности Остроградский трактует из субъективных позиций, как меру уверенности познающего субъекта. Он пишет:

«Слово „вероятность“ само по себе не имеет значения; оно непременно относится к какому-нибудь явлению или происшествию. Обыкновенно явления считают вероятными, когда полагают, что они скорее случатся, чем не произойдут. Напротив, явление находят невероятным, если причины думать, что оно не сбудется, считают убедительнее причин, ему благоприятных.

Кто сомневается, или лучше, кто не убежден, что в наших климатах за осенью следует зима?.. Геометр же найдет эту последовательность чрезвычайно вероятною, но недостаточною» [Там же, с. 239—240].

И далее Остроградский пишет: «В природе нет вероятности. Все, что происходит в мире, непременно и несомненно. Вероятность есть следствие слабости человеческой; она относится к нам, существует для нас и может быть только для нас. Рассматривание ее есть важное, даже необходимое дополнение к тем немногим истинам, которые мы знаем с относительною достоверностью.

Явления в природе заменяются в совершенно определенной последовательности. Эту последовательность существа, высшие нас, могли бы открыть и доказать. Но мы, не зная ни начала, ни взаимной связи явлений, ни их отношений к нам, наблюдая только ничтожную часть тех, которые происходят вблизи нашей планеты, мы не только не в состоянии предсказывать их последовательности, но останемся навсегда в совершенном неведении существования большей части из них. Те же, о которых знаем из наблюдений, для нас только вероятны в различных степенях» [Там же, с. 240].

Остроградский подробно говорит о том, что вероятность есть мера нашего незнания, что это субъективное понятие, что вероятности в объективном мире нет никакого соответствия, что весь мир детерминистичен и случайного в нем нет, есть только то, что мы не знаем или не познали, которое мы и называем случайным.

«Если явление совершенно зависит от нескольких других явлений или случаев, из которых одни могут его произвести, другие ему противны, и если притом все эти случаи таковы, что для нас, мы повторяем, для нас, нет причины одни из них предпочитать другим, то вероятность ожидаемого явления измеряется дробью, которой числитель равен числу случаев, доставляющих явление, а знаменатель — числу всех случаев» [Там же, с. 240—241]. Это утверждение совпадает с классическим определением вероятности Лапласа, с толкованием равновозможности как недостаточности оснований давать предпочтение одним событиям перед другими.

Рассматривается пример. В урне находятся 5 шаров (3 белых и 2 черных), из нее извлекают один шар. Какова вероятность, что этот шар будет белым? Относительно этого примера Остроградский пишет: «Пять шаров находятся в вазе; нет никакой причины думать, что один из них попадет в руку скорее, нежели другой. Говоря, нет никакой причины, разумеется, что ее нет для нас,— она есть, но совершенно нам неизвестна... И как мы не можем дать одному шару преимущество перед другим, то все шары представля-

ют для нас случаи равновозможные. Тот, кто знал бы расположение шаров в урне и мог бы вычислить движение вынимающей руки, тот сказал бы наперед, какой именно выйдет шар,— для него не было бы вероятности.

Если бы для нас в самом деле не было причин вынуть такой-то шар, а не другой, тогда появление шара было бы действительно невозможно, как невозможно действие без причины.

Мы повторяем, что вероятность, и одинаковая возможность случаев, и мера вероятности существуют только для нас. Для существ же всеведущих, т. е. имеющих все сведения о всех явлениях, вероятность не может иметь не только меры, но и никакого значения» [Там же, с. 241].

Это высказывание является типичным утверждением в духе механистического детерминизма, который был в то время широко распространен.

Мы не останавливаемся здесь на практических приложениях теории вероятностей, которыми занимался Остроградский (см., например, [Майстров, 1967]).

Работы Остроградского по теории вероятностей были на уровне науки того времени, но при трактовке самой вероятности он допускал ошибки методологического характера.

В заключение данного параграфа отметим, что Буняковский и Остроградский много сделали для распространения теории вероятностей в России. Многие их работы были вызваны практическими запросами. Их творчество в области теории вероятностей подготовило почву и оказало влияние на создание Петербургской школы. Несмотря на это, их труды оставались в русле старой тематики, они не затрагивали центральных вопросов теории вероятностей, не дали новых трактовок понятию вероятности.

Для того чтобы дать теории вероятностей новый толчок в развитии, указать выход из тупика, нужен был материалистический подход к основным вопросам, нужны были новые идеи и новые методы.

Их внес в теорию вероятностей П. Л. Чебышев.

2. Вероятность у П. Л. Чебышева и его школы

Большое влияние на все дальнейшее развитие теории вероятностей и трактовку вероятности оказало творчество П. Л. Чебышева (1821—1894). С работ Чебышева и возглавляемой им школы (Петербургской математической школы) начался новый этап в истории теории вероятностей и развития понятия вероятности.

Единство теории и практики было определяющим в математическом творчестве Чебышева. Свои взгляды по этому вопросу он отчетливо высказал в речи, написанной для торжественного акта в Петербургском университете в 1856 г., которая называлась «Черчение географических карт». Чебышев писал: «Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное

внимание; в настоящее время они получили еще больше интереса по влиянию своему на искусство и промышленность. Сближение теории с практикой дает самые благоприятные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования, или новые стороны в предметах давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и, таким образом, вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике» [Чебышев, 1951, с. 249].

Чебышев стремился к строгому и эффективному решению задач, к построению алгоритмов, которые позволяют доводить исследование до числового ответа либо до пригодного приближенного решения. При этом строгость приближенного решения он понимал в смысле возможности установления пределов погрешности.

Непосредственными учениками Чебышева были, в частности, А. М. Ляпунов и А. А. Марков. Их научная деятельность протекала под сильным воздействием Чебышева. Глубокую характеристику подходу Чебышева (и его школы) к математическим задачам дал А. М. Ляпунов: «Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды» [Ляпунов, 1946, с. 20].

За два столетия развития теории вероятностей главными ее достижениями были предельные теоремы — закон больших чисел и теорема Муавра — Лапласа. Но обоснование предельных теорем было недостаточным. Не были выяснены границы их применимости и возможности дальнейшего обобщения. В приложениях часто допускались принципиальные ошибки. Даже Лаплас и Пуассон не избежали этих ошибок. Это в первую очередь относится к оценке вероятностей свидетельских показаний, правильности судейских решений и другим вопросам общественной жизни. Подобные необоснованные приложения, опирающиеся на произвольные и неверные допущения, сильно компрометировали саму теорию вероятностей.

В результате этого в теории вероятностей сложилась ситуация, когда дальнейшее ее развитие требовало внесения ясности в основные положения. Нужно было установить область применения теории вероятностей, ее предмет, изучить и усилить специфические методы исследования.

Интерес к теории вероятностей у Чебышева был неизменным и устойчивым. Еще в начале своей творческой деятельности, в 1846 г., он защитил в Московском университете магистерскую диссертацию по работе «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В связи с уходом из Петербургского университета Буняковского Чебышев в 1860/61 учебном году начал читать курс теории вероятностей. Чебышев читал много различных курсов, но два из них были для него любимыми. Это теория чисел и теория вероятностей. За свою долголетнюю работу в университете он прочел каждый из этих курсов 31 раз.

Основное внимание в теории вероятностей Чебышев сосредоточил на предельных теоремах. По теории вероятностей им было опубликовано всего четыре работы, но они сыграли громадную роль в дальнейшем развитии этой науки. Первая работа — это его магистерская диссертация. Уже здесь появилась основная идея Чебышева: при доказательстве предельных теорем он стремится давать точные оценки приближений.

Задачу своей диссертации Чебышев формулирует следующим образом: «Показать без посредства трансцендентного анализа основные теоремы исчисления вероятностей и главные приложения их, служащие опорою всем знаниям, основанным на наблюдениях и свидетельствах... Решение этой задачи представляет, с одной стороны, важное развитие приемов алгебраического анализа, с другой — значительную пользу в распространении знаний исчисления вероятностей между множеством людей, ограничивающихся в изучении математики одною алгеброю» [Чебышев, 1951, с. 27].

Первую главу Чебышев начинает с введения понятия вероятности. Для этого он прежде всего определяет равновозможные события. «Если из определенного числа различных событий при известных обстоятельствах одно необходимо должно случиться и нет особенной причины ожидать какого-либо из этих событий преимущественно пред другими, то такие события отличаем названием *случаев равновозможных*» [Там же, с. 28]. Нельзя сказать, чтобы это определение было очень четким.

Если из n случаев m имеют следствием некоторое событие, то мерой вероятности этого события, которое называют вероятным, принимают m/n, т. е. «отношение числа равновозможных случаев, благоприятных для события, к числу всех равновозможных случаев» [Там же].

Как мы уже видели, до появления работ Чебышева теория вероятностей переживала кризис, основная причина которого состояла в том, что из-за незнания предмета этой науки ее широко

применяли к различным «нравственным» вопросам: юриспруденции, истории, достоверности преданий и т. п. Почти все такие применения были необоснованны. Теорию вероятностей необоснованно привлекали и к различным философским выводам. Но автор не хочет, чтобы его поняли так, будто теория вероятностей ко всем перечисленным и подобным вопросам неприменима вообще. Теория вероятностей применима к любой области человеческой деятельности, если имеются налицо случайные явления с определенными характеристиками. Теперь эти характеристики точно сформулированы. Но в тот период не были очерчены границы применимости законов теории вероятностей, и поэтому их применяли без анализа к самым разнообразным явлениям, многие из которых совсем не относятся к теории вероятностей.

В связи с этим определение Чебышевым предмета теории вероятностей имеет принципиальное значение. «Наука о вероятностях, известная под именем теории вероятностей, имеет предметом определение вероятности события по данной связи его с событиями, которых вероятности известны» [Там же, с. 29]. Чебышев определяет теорию вероятностей как математическую дисциплину с известными элементарными вероятностями, на основании которых мы по правилам и законам теории вероятностей определяем другие вероятности. Чебышев не говорит, как мы узнаем элементарные вероятности, но, учитывая его материалистические установки и недоверие к философским спекуляциям, мы не сомневаемся, что он считал, что вероятности элементарных событий известны нам из практики, из наблюдений явлений в окружающем нас мире. Только после того, как установлены на опыте или посредством наблюдений вероятности некоторых событий и вскрыты связи их с другими событиями, возможно применение теории вероятностей для получения вероятностей событий по вероятностям других событий, с которыми рассматриваемое событие находится в связи.

Не случайно, что ни в этой, ни в других работах Чебышев не занимается вопросами устройства судов, достоверностью преданий, нравственным ожиданием и подобными вопросами, хотя работы других авторов, выходившие в эти годы, уделяют им, как мы видели, достаточно много внимания.

Основных вопросов, которыми занимался Чебышев в теории вероятностей, было два: закон больших чисел и предельная теорема для сумм независимых случайных величин. Перед ним стояла задача — доказать для возможно более широкого класса случайных величин эти теоремы.

Это были центральные вопросы теории вероятностей. От их решения зависел дальнейший путь ее развития.

Уже в первой работе по теории вероятностей П. Л. Чебышев не только по-новому доказал теорему Я. Бернулли, но и указал пределы погрешности при пользовании ею. Здесь отчетливо видна основная идея Чебышева — давать при доказательстве предель-

ных теорем оценку приближений, которые необходимы при использовании этих теорем для конкретных задач.

В 1846 г. была опубликована работа Чебышева «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей». В ней была доказана теорема Пуассона с соответствующими оценками погрешностей. Говоря о задаче этой статьи, Чебышев дает некоторую оценку своему подходу к основным вероятностным теоремам.

«Предметом этой заметки будет доказательство следующего предложения: Можно всегда назначить столь большое число испытаний, при котором будет сколь угодно близка к достоверности вероятность того, что отношение числа повторений некоторого события E к числу испытаний не уклонится от средней арифметической вероятностей события E свыше данных пределов, как бы ни были тесны эти пределы.

Это основное предложение теории вероятностей, заключающее как частный случай закон Якова Бернулли, было выведено г. Пуассоном... Однако, как ни остроумен способ, употребленный знаменитым геометром, он не доставляет предела погрешности, которую допускает этот приближенный анализ, и вследствие такой неизвестности величины погрешности доказательство не имеет надлежащей строгости» [Чебышев, 1947, с. 14].

Чебышев в этой работе установил, что значение нижней границы числа μ испытаний, достаточных для того, чтобы вероятность отклонения m/μ от p более данных пределов была меньше некоторой произвольно малой величины, в случае Бернулли применимо к случаю Пуассона. Эта работа содержит первое общее доказательство теоремы Пуассона для независимых событий, хотя нужно отметить, что Чебышев не оговаривал независимость событий.

Возможно, он считал, что вообще теория вероятностей изучает только независимые события, так как он этого не оговаривает ни в одной из своих работ, хотя понятие независимости им существенно используется и к зависимым событиям свои выводы он не применяет. Следует сказать, что Пуассон ошибочно применял свою теорему и к различным зависимым событиям.

Полученная Чебышевым оценка достаточна для обоснования практических применений теоремы Пуассона.

В конце 1866 г. Чебышев доложил Академии наук свою работу «О средних величинах», которая в 1867 г. была опубликована в «Математическом сборнике» и в журнале Лиувилля [1]. В этой работе Чебышев доказал важное неравенство, при помощи которого он получил теорему (закон больших чисел в классической формулировке Чебышева) и как следствия из нее теоремы Бернулли и Пуассона.

Это неравенство теперь называется неравенством Чебышева

[1] Математический сборник, 1867, II; J. math. pures et appl., 1867, XII.

и записывается в следующем виде:

$$P(|x-\bar{x}|\leqslant\varepsilon)\geqslant 1-\frac{D(x)}{\varepsilon^2},$$

где случайная величина x имеет среднее значение $\bar{x}$ и дисперсию $D(x)$, а ε — любая отличная от нуля положительная величина.

О получении неравенства Чебышева, доказательства теоремы Чебышева и, как следствие из нее, теорем Бернулли и Пуассона можно прочитать в любом современном учебнике по теории вероятностей или математической статистике (см., например, [Белинский и др., 1965]).

Следует сказать, что идея вывода основного неравенства (неравенства Чебышева) содержалась в работе Ж. Бьенэме, которая была помещена в том же номере журнала Лиувилля, что и работа Чебышева. За этим неравенством надолго закрепилось имя неравенства Бьенэме — Чебышева. А. А. Марков объясняет это следующим образом: «Мы соединили с этим замечательным, простым неравенством два имени, Бьенэме и Чебышева, по той причине, что оно впервые ясно высказано и доказано Чебышевым, но основная идея доказательства была значительно раньше указана Бьенэме, в мемуаре которого... можно найти и самое неравенство, обставленное только некоторыми частными предложениями» [Марков, 1924, с. 92].

Но ввиду того, что неравенство «впервые ясно высказано и доказано Чебышевым», а также потому, что применение этого неравенства к обобщению закона больших чисел полностью принадлежит Чебышеву, в современной литературе это неравенство называется неравенством Чебышева.

Закон больших чисел в наиболее общей форме был доказан Чебышевым в 1866 г.; вторая же основная проблема, которой он занимался — центральная предельная теорема,— была опубликована только в 1887 г. [Чебышев, 1948]. Хотя доказательство этой теоремы содержит недостатки, которые впоследствии были устранены, эта работа является крупнейшим достижением Чебышева в теории вероятностей; совместно с предыдущими работами, а также с работами Маркова и Ляпунова она ознаменовала начало нового периода в теории вероятностей, в изучении свойств вероятности. А. Н. Колмогоров дает такую оценку работе Чебышева о центральной предельной теореме: «Этот мемуар, несмотря на некоторую его незавершенность, является одним из высших достижений Чебышева и реализацией замыслов, занимавших Чебышева в течение долгих лет. Здесь результаты исследований Чебышева по теории моментов прилагаются к определению вида закона распределения вероятностей суммы большого числа независимых случайных величин, устанавливается, что при некоторых весьма общих условиях этот закон распределения неограниченно приближается с увеличением числа слагаемых к нормальному закону распределения Муавра — Лапласа (так называемая «основная предельная теорема теории вероятностей»), а также без строгого

вывода указывается на возможность дальнейшего уточнения этого результата» (см. [Чебышев, 1948, с. 404]).

Итак, основных вопросов, которыми занимался Чебышев в теории вероятностей, было два: закон больших чисел и предельная теорема для сумм независимых случайных величин. Перед ним стояла задача — доказать для возможно более широкого класса случайных величин эти теоремы.

Это были центральные вопросы теории вероятностей. От их решения зависел дальнейший путь развития теории вероятностей. Проблема закона больших чисел была полностью решена Чебышевым в 1866 г.; решение проблемы центральной предельной теоремы было достигнуто через 20 лет.

Сущность ее состоит в следующем. Случайные явления происходят, как правило, под воздействием большого числа причин, каждая из которых в отдельности оказывает незначительное влияние на явление.

Так как число причин велико и распределение вероятностей каждой из этих величин в общем случае неизвестно, то определить функцию распределения суммы этих величин часто бывает не только очень трудно, но и невозможно. Поэтому определяют предельную функцию распределения, т. е. функцию распределения, когда число причин $n \to \infty$, и заменяют ею ту функцию, которая должна описывать характер явления. Еще Лаплас предполагал, что наличие нормального закона, которому подчиняются случайные ошибки измерений, указывает на то, что ошибка измерения происходит под влиянием большого числа независимо действующих причин. Эта мысль была только высказана Лапласом, но не получила развития в его работах.

Возможность замены такой функции распределения предельной вытекает из так называемой центральной предельной теоремы. Сущность ее состоит в выяснении условий, при которых функция распределения сумм независимых случайных величин с ростом числа слагаемых приближается к нормальному закону распределения. Огромное число явлений происходит под действием большого числа причин, каждая из которых действует независимо от других и в отдельности очень мало влияет на течение явления. Поэтому центральная предельная теорема имеет такое большое значение для всего естествознания.

Чебышев установил, что при весьма общих условиях закон распределения вероятностей суммы большого числа независимых случайных величин неограниченно приближается с увеличением числа слагаемых к нормальному закону распределения.

О роли Чебышева в теории вероятностей Колмогоров писал: «Вывел русскую теорию вероятностей на первое место в мире Пафнутий Львович Чебышев. С методологической стороны основной переворот, совершенный Чебышевым, заключается не только в том, что он впервые с полной настойчивостью выдвинул требование абсолютной строгости доказательства теорем (выводы Муав-

ра, Лапласа и Пуассона были с формально-логической стороны совсем не безупречны в отличие, впрочем, от Бернулли, который свою предельную теорему доказал с исчерпывающей арифметической строгостью), но главным образом в том, что Чебышев всюду стремился получать точные оценки отклонений от предельных закономерностей, возможных хотя бы и при большом, но конечном числе испытаний в виде безусловно правильных при любом числе испытаний неравенств» [Колмогоров, 1956, с. 56].

Устанавливая границы применимости основных теорем теории вероятностей, а тем самым и понятия вероятности, Чебышев давал случайным величинам ясные и отчетливые математические характеристики, которые имели реальное содержание. Это позволило в каждом конкретном случае решать вопрос о том, применимы ли к данным случайным величинам предельные теоремы.

В трудах Чебышева теория вероятностей не была абстрактным построением, он указал широкие классы случайных явлений, к которым она применима, к которым применимы вероятностные рассуждения.

Чебышевым была создана русская школа теории вероятностей, его работы послужили началом нового периода в развитии этой науки.

А. Я. Хинчин говорил, что начиная со второй половины XIX в. Россия была «единственной страной, в которой математические основы теории вероятностей культивировались с той серьезностью, какой заслуживала эта наука по своей выдающейся роли в естествознании и технике. Этим своим исключительным положением русская теория вероятностей целиком обязана работам Чебышева» [1].

Как мы видим, Чебышев никакого нового определения понятия вероятности не дал и как будто бы специально о вероятности ничего не писал. Но это представление неверно. Вероятность, в первую очередь математическое понятие и его содержание, вскрывается глубже всего не в словесных определениях, а в математических теоремах. Первые основные свойства вероятности были уже вскрыты в теоремах сложения и умножения. Существеннейшую роль в понимании вероятности сыграла теорема Я. Бернулли и т. д. Закон больших чисел в форме Чебышева и его центральная предельная теорема были важнейшим шагом в толковании, понимании и формировании понятия вероятности.

Одним из ярких представителей Петербургской математической школы является ученик и последователь Чебышева, крупнейший математик А. А. Марков (1856—1922). Труды Маркова по теории вероятностей во многом определили ее дальнейшее развитие.

Чебышев доказал предельную теорему для определенного класса случайных величин, но его доказательство страдает недостатками. Об этих недостатках Марков пишет: «Мемуар Чебышева

---

[1] Фронт науки и техники, 1937, № 7, с. 36.

„О двух теоремах относительно вероятностей" имеет важное значение. К сожалению, это значение сильно затемняется двумя обстоятельствами:

1) сложностью выводов,

2) недостаточной строгостью суждений» [Марков, 1951, с. 233].

В 1898 г. Марков дает строгое доказательство предельной теоремы при тех же ограничениях, которые были у Чебышева. Основное из них состоит в требовании существования у случайных величин конечных моментов любого порядка.

В 1900 и 1901 гг. появились две работы А. М. Ляпунова (1857—1918), в которых он доказал предельную теорему для случайных величин с гораздо меньшими ограничениями, чем требовали Чебышев и Марков. В первую очередь это относится к отказу от требований существования моментов всех порядков у рассматриваемых случайных величин. При доказательстве своей теоремы Ляпунов применил метод характеристических функций. Именно в формулировке Ляпунова предельная теорема получила название центральной предельной теоремы теории вероятностей. Марков вскоре доказал теорему Ляпунова, не прибегая к характеристическим функциям, а используя метод моментов.

Но основная заслуга Маркова в теории вероятностей состоит в том, что он является основателем одного из важнейших ее разделов — изучения зависимых случайных величин. Здесь его интересовали в основном два вопроса: применимость закона больших чисел и центральной предельной теоремы к суммам зависимых величин.

Хотя мы широко пользовались термином «закон больших чисел», считая его одной из основных характеристик вероятности, мы нигде не уточняли этот термин. Я. Бернулли свою теорему так не называл. Впервые «закон больших чисел» мы встречаем у Пуассона. Любопытно, что Чебышев не называл доказанную им теорему «законом больших чисел», хотя теорема Пуассона получается из нее как частный случай. Марков под этим законом понимал закон, «в силу которого с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, можно утверждать, что среднее арифметическое из нескольких величин, при достаточно большом числе этих величин, будет произвольно мало отличаться от средней арифметической их математических ожиданий» [Там же, с. 341]. Такое понимание закона больших чисел теперь общепринято. Различными формами закона больших чисел будут и теорема Я. Бернулли, и теорема Пуассона, и теорема Чебышева. Последняя теорема является наиболее общей формой этого закона.

Несмотря на это, замечает Марков, «условия Чебышева далеко не исчерпывают всех случаев, к которым можно применить вышеуказанный закон» [Там же, с. 342].

Чебышев распространил закон больших чисел на независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями: $D(x) \leqslant c$. В работе «Распространение закона больших чисел на

величины, зависящие друг от друга» [1] Марков вначале говорит о независимых случайных величинах, распространив применимость закона больших чисел почти до его границ. Впоследствии Колмогоров показал, что условие Маркова близко к необходимому условию, которое было установлено в различной форме А. Н. Колмогоровым (1928) и А. Я. Хинчиным (1929).

В этой же работе Марков переходит и к зависимым величинам, доказывая, что закон больших чисел применим к $S_n = \Sigma x_i$, если $D(x_i) < c$ и «когда связь величин такова, что увеличение любой из них влечет за собой уменьшение математических ожиданий остальных» [Там же]. Далее Марков делает замечание: «...к тому же заключению о применимости закона больших чисел не трудно прийти и в случае, когда математическое ожидание x^k при всяком k уменьшается с увеличением суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}$» [Там же, с. 344].

Затем Марков рассматривает последовательность случайных величин x_k, которые определенным способом зависимы (связаны в цепь). Именно, пусть характер зависимости членов последовательности x_k таков, что если известно значение какой-нибудь из этих величин, то при этом условии последующие величины не зависят от предыдущих. Такие цепи зависимых величин получили в дальнейшем название марковских цепей. Учение о марковских цепях выросло в большой отдел теории вероятностей.

Последовательность случайных величин, каждая из которых может принимать любое число исходов, называется простой цепью Маркова, если вероятности исходов при $(n + 1)$-м испытании получают определенное значение, если известен только результат n-го испытания, независимо от того, какие события происходили в более ранних испытаниях. Если же эти вероятности получают определенное значение, только когда известны результаты k предыдущих испытаний, то цепь называется сложной цепью Маркова k-го порядка.

В этой работе Марков рассматривает простую цепь, причем все x_i принимают значения только 0 или 1. Он устанавливает, что эти случайные величины также подчинены закону больших чисел. Нужно отметить, что Марков требовал, чтобы все вероятности перехода $P_{\alpha, \beta} > 0$. Но вывод Маркова остается справедливым, если вместо такого сильного ограничения потребовать только, чтобы это условие выполнялось хотя бы для одной вероятности при любом α.

Кончается работа следующими словами: «Итак, независимость величин не составляет необходимого условия для осуществления закона больших чисел» [Там же, с. 361].

---

[1] Работа была впервые опубликована в «Известиях физико-математического общества при Казанском университете» (сер. 2, XV, № 4). На обложке этого номера стоит 1906 г., а в конце статьи Марков поставил дату: 25 марта 1907 г.

В целой серии дальнейших работ Марков доказывает применимость центральной предельной теоремы к суммам случайных величин, связанных в простую однородную цепь или в сложную однородную цепь, а также к другим зависимым величинам.

Исследование цепей Маркова, а затем и марковских процессов имеет важное значение в приложениях теории вероятностей к различным разделам естествознания и техники. Цепи Маркова применимы тогда, когда имеются такие системы, которые могут находиться лишь в одном из некоторого, не более чем счетного множества состояний и переходят из одного состояния в другое в определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$, причем известны вероятности $P_{ij}(k)$ того, что система в момент времени t_{k+1} находится в состоянии ω_j, если известно, что в момент времени t_k она находилась в состоянии ω_i, и эти вероятности не меняются, если становится известным поведение системы и до момента времени t_k. Моменты перехода могут и не фиксироваться заранее («непрерывное время»).

Теория марковских процессов находит применение в теории броуновского движения, в теории диффузии, в квантовой механике и многих других областях.

Работы Маркова значительно расширили область применимости вероятности, так как в них было доказано, что отдельные классы случайных величин подчиняются как закону больших чисел, так и центральной предельной теореме. Поэтому мы должны считать, что новый период в теории вероятностей, а вместе с тем и развития вероятности следует относить в одинаковой мере как к работам Чебышева, так и к работам Маркова.

Сам Марков не рассматривал никаких естественнонаучных или технических приложений цепей. В работе «Замечательный случай испытаний, связанных в цепь», которая помещена в конце книги [Марков, 1924], Марков исследует чередование гласных и согласных букв в русском языке. Для этого он берет последовательность из 20 000 букв из «Евгения Онегина» А. С. Пушкина. Он пишет, что эту последовательность с некоторым приближением можно рассматривать как простую цепь. Марков исследовал также последовательность из 100 000 букв из «Детских годов Багрова-внука» С. Т. Аксакова.

Марков искал вероятность того, что наугад взятая буква из русского текста будет гласной. Эта вероятность зависит от того, гласной или согласной будет предшествующая буква. Для «Евгения Онегина» вероятность появления гласной буквы после гласной равна $\alpha = 0{,}128$, а гласной после согласной $\beta = 0{,}663$.

Простая цепь Маркова обладает эргодическим свойством, т. е. свойством того, что предельное распределение не зависит от начального состояния.

В этом случае

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_s = \lim_{s\to\infty} \beta_s = \frac{\beta}{1-\alpha+\beta}.$$

Применяя эту формулу к обследованному тексту «Евгения Онегина», Марков получил, что вероятность встретить на n-м месте гласную букву будет

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\beta}{1-\alpha+\beta} = \frac{0{,}663}{1-0{,}128+0{,}663} = 0{,}432.$$

Марков подсчитал, что эта величина совпадает с частотой, с которой встречается гласная буква в тексте «Евгения Онегина».

Такими были первые задачи, которые затем открыли дорогу широкому внедрению новых вероятностных методов в естествознание (в первую очередь физику) и технику.

Отдельные задачи, в которых рассматривались примеры цепей Маркова, встречались ранее у Ф. Гальтона (1822—1911) в применениях вероятности к исследованиям в биологии и у английского физика Дж. Рэлея (1842—1919). Но они разбирали только отдельные примеры, общая структура цепей не была ими изучена. Поэтому Маркова считают основоположником нового направления в теории вероятностей.

С 1883 г. Марков, после Чебышева, начал читать в Петербургском университете курс теории вероятностей, который был его любимым курсом; он его продолжал преподавать и после 1905 г., когда ушел в отставку. Высокое качество его лекций нашло полное отражение в книге «Исчисление вероятностей» (1913). Здесь в полной мере получили освещение новые идеи и результаты. Будучи высоконаучным произведением, эта книга рассчитана также и на начинающего читателя. Четвертое издание этой книги вышло в 1924 г., по ней в течение многих лет учились русские математики [Марков, 1924].

Начинается книга с основных понятий и теорем. Для вероятности дается классическое определение, но к определению равновозможности («два события мы называем равновозможными, если нет никаких оснований ожидать одного из них предпочтительно перед другим. Несколько событий мы называем равновозможными, если каждые два из них равновозможны») Марков делает следующее примечание: «По моему мнению, различные понятия определяются не столько словами, каждое из которых может в свою очередь потребовать определения, как нашим отношением к ним, которое выясняется постепенно» [Там же, с. 2].

К основным теоремам Марков относит теоремы сложения и умножения.

Придавая большое значение теореме Бернулли, он после ее формулировки дает три различных доказательства, начиная с доказательства самого Я. Бернулли. После этих доказательств Марков замечает: «Из теоремы Бернулли обыкновенно заключают, что при беспредельном возрастании числа испытаний отношение числа появлений события к числу испытаний приближается к вероятности события при отдельных испытаниях. Подобное заключение нельзя, однако, признать безусловно правильным не только

для тех случаев, когда условия теоремы Бернулли не выполнены, но и для тех случаев, к которым эта теорема вполне применима.

Условия теоремы Бернулли состоят в независимости испытаний и в постоянстве величины вероятности события.

При этих условиях теорема Бернулли обнаруживает невероятность значительных отклонений отношения m/n от p при больших n. Но она не устраняет окончательно возможности таких отклонений, и эти невероятные отклонения могут оказаться действительными» [Там же, с. 67]. Это очень интересное замечание. Фактически в нем Марков выступает против определения вероятности как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = p$.

На конференции Московского университета А. Н. Колмогоров говорил: «Значение работ Чебышева, Маркова и Ляпунова было вполне оценено в Западной Европе лишь с большим запозданием — в 20-х и даже 30-х годах нашего века. Теперь они всюду воспринимаются как исходный пункт всего дальнейшего современного развития теории вероятностей. В частности, основная предельная теорема Ляпунова и теория цепей Маркова были именно тем, что было наиболее необходимо для солидного обоснования развившейся статистической физики. Медленность усвоения идей Петербургской школы на Западе, может быть, отчасти объясняется тем, что школа стояла очень далеко от статистической науки.

Мне хотелось бы, однако, чтобы из последнего замечания не получалось впечатление, будто работы Петербургской школы были лишены живого чувства связи с запросами математического естествознания. Но в силу отсталости русской физики второй половины XIX в. интересы математиков Петербургской школы не были направлены именно в эту, может быть, наиболее интересную в смысле намечавшихся уже в их время перспектив применения теории вероятностей сторону (работы Больцмана относятся к 1866—1898 гг.). Особенно Чебышеву было в высокой степени присуще чувство реальности в постановке математических задач. Отправляясь от сравнительно специальных, элементарных и иногда несколько старомодных прикладных задач, он с исключительной принципиальностью извлекал из них математические общие концепции, которые потенциально охватывали неизмеримо более широкий круг технических и естественнонаучных проблем» [Колмогоров, 1956, с. 59].

Сложившуюся в теории вероятностей ситуацию к началу XX в. Ляпунов описывает подробно следующим образом. «Чебышев в одном из своих мемуаров показал, как результаты его исследований о предельных величинах интегралов могут привести к доказательству известной теоремы Лапласа и Пуассона о вероятности, с которой сумма большого числа независимых случайных величин оказывается заключенной между данными пределами.

Известно, что эта теорема была предметом большого числа исследований. Между тем, попытки строгого доказательства ее

при сколько-нибудь общих условиях оставались долгое время неудачными, и Чебышев был, насколько мне известно, первым, кто с успехом преодолел эту трудность.

Однако знаменитый ученый дал только набросок доказательства, и некоторые пункты его анализа требовали еще дополнительного исследования. Кроме того, в формулировке теоремы Чебышев указал, в сущности, только одно условие, а именно что математические ожидания (вероятные значения) всех степеней переменных должны оставаться по абсолютному значению меньше некоторого предела, а между тем это условие недостаточно, как видно уже в частном случае закона больших чисел.

Поэтому в некоторых отношениях мемуар Чебышева требовал еще дополнений, и именно это сделал Марков в своей недавней, не оставляющей желать ничего лучшего работе; уточнив вполне формулировку теоремы введением дополнительного условия, Марков дал также необходимое развитие самому доказательству.

Таким образом, в том, что касается строгости, замечательное доказательство, набросанное Чебышевым, проведено безупречно.

Несмотря на это, следует признать, что это доказательство, связанное со специальной теорией, является слишком сложным и громоздким. Оно не исключает, следовательно, необходимости дальнейших исследований, и прямое доказательство остается, во всяком случае, желательным.

Ввиду этого мне казалось полезным пересмотреть прежние методы, применявшиеся в рассматриваемом вопросе...

Желательно было, следовательно, вернуться к вопросу и найти такое изменение метода, которое позволило бы устранить затруднения, по крайней мере при известных условиях. Это является той задачей, которую я себе поставил и которую я попытался решить...

Мне удалось получить очень общий результат, доказывающий справедливость теоремы при условиях, значительно более общих, чем дополнение Марковым условия теоремы Чебышева, причем он получен мною с помощью анализа, не зависящего от какой-нибудь специальной теории, и основан только на самых элементарных соображениях» [Ляпунов, 1948, с. 181—183].

Ляпуновым по теории вероятностей были опубликованы только две большие работы (см. [Ляпунов, 1948]).

Ляпунову удалось получить более общие результаты, чем Чебышеву и Маркову, благодаря применению нового метода — метода характеристических функций. Ляпунов доказал центральную предельную теорему, применяя характеристические функции. Теорема Ляпунова имеет важное значение для теории вероятностей и ее приложений. Она объясняет, в частности, почему многие случайные величины подчиняются нормальному распределению. Из теоремы Ляпунова следует, что если случайная величина x является суммой большого числа независимых случайных величин, каждая из которых ничтожно влияет на всю сумму, то x имеет

распределение, близкое к нормальному. При этом законы распределения величин, составляющих сумму, могут быть неизвестны.

Именно такие случайные величины часто встречаются на практике. К ним, например, относятся ошибки измерений, показатели размеров и веса объектов какого-нибудь производства, многие физические величины, которые подвержены случайным изменениям, и т. п.

Опубликование теоремы Ляпунова вызвало целый ряд исследований, в первую очередь в направлении ослабления условий, которые накладывал Ляпунов на случайные величины при доказательстве своей теоремы. Только через 20 лет Линдбергу удалось улучшить результаты Ляпунова. Он нашел новое достаточное условие для выполнения теоремы Ляпунова. Феллер вскоре доказал необходимость этого условия.

Предпринимались также попытки распространить теорему Ляпунова на зависимые случайные величины. Эти попытки завершились работой С. Н. Бернштейна [Бернштейн, 1933], в которой результаты Ляпунова были распространены на величины со слабой корреляционной зависимостью и на последовательности случайных векторов.

Петербургская школа не только реабилитировала теорию вероятностей в глазах ученых, но и дала мощный толчок ее развитию. Следует обратить внимание только на то, что математики того времени не видели широких вероятностных приложений в естествознании, в первую очередь в физике, хотя физика уже довольно давно в своем развитии подошла к понятию вероятности и использовала его независимо от математиков в своих построениях.

3. Вероятность в физике

Еще в 1827 г. английский ботаник Броун, рассматривая в микроскоп растительные препараты, заметил движение мелких взвешенных частиц. Затем выяснилось, что всякая достаточно мелкая крупинка, находящаяся во взвешенном состоянии, постоянно перемещается самым случайным образом. Это движение получило название броуновского движения. Оно является результатом случайных толчков, которые испытывает взвешенная частица со стороны хаотически движущихся молекул. Теорию броуновского движения оказалось возможным разработать только с помощью вероятностных соображений.

Законченная теория броуновского движения была создана лишь в 1905 г. А. Эйнштейном (1879—1955) и М. Смолуховским (1872—1917). В 1906 г. Эйнштейн писал, что только теперь физики «в результате непосредственных наблюдений пришли к убеждению, что так называемое броуновское движение вызывается беспорядочным тепловым движением молекул жидкости. Не только качественная сторона явления, но и порядок величины пути, который проходит частица в единицу времени, полностью соответствуют

результатам теории» [Эйнштейн, 1966а, с. 118]. Еще в 1908 г. теория броуновского движения не была широко известна. Так, объясняя мотивы написания работы «Элементарная теория броуновского движения», Эйнштейн писал: «Профессор Г. Лоренц во время одной из бесед со мной заметил, что многим химикам было бы полезно элементарное изложение броуновского движения. Следуя его совету, я даю в настоящей работе простую теорию этого явления» [Эйнштейн, 1966б, с. 155]. Вообще говоря, все молекулярное учение практически полностью базируется на вероятностных соображениях. Большое число молекул и хаотичность их теплового движения делают плодотворным применение таких рассуждений. Именно поэтому кинетическая теория газа была первой областью физики, в которой применили статистические методы. В этой теории молекулы газа считаются упругими шариками, которые двигаются в соответствии с законами механики по прямым линиям, изменяя свое направление в результате столкновений. Например, давление газа объясняется тем, что, ударясь в стенку, молекулы передают свой импульс. Наблюдать за отдельными молекулами невозможно, можно только учитывать их средние показатели, именно это и привлекло сюда статистику. Для получения эффективных выводов необходимо было многие показатели считать равновероятными. Именно на предположении равновероятности всех направлений движения молекул основывается вывод закона $PV = RT$. «Нам остается лишь возможность сформулировать гипотезы для случая равной вероятности, вывести из них следствия и посмотреть, согласуются ли они с экспериментом. В сущности, мы возвращаемся к прежней форме расчета вероятностей, которая применяется, например, при игре в кости и к которой часто относятся с пренебрежением» [Борн, 1963, с. 59].

Можно с большой степенью точности утверждать, что молекулы газа равномерно распределяются по всему объему. В среднем отклонения от равномерного распределения будут ничтожно малы. Не исключены и заметные отклонения, но они будут встречаться крайне редко, и тем реже, чем эти отклонения больше. Все эти выводы и вообще выводы молекулярной физики можно в основном получать статистическими методами. Статистическими методами можно определить среднюю скорость молекул, их среднюю кинетическую энергию и много других величин.

Если до второй половины XIX в. основными областями применения теории вероятностей были обработка результатов наблюдений, статистика (в первую очередь демография) и некоторые другие вопросы, то во второй половине XIX в. положение принципиально изменилось. В первую очередь это связано с появлением работ австрийского физика Л. Больцмана (1844—1906) и американского ученого Д. В. Гиббса.

Больцман является крупнейшим физиком-теоретиком второй половины XIX в., одним из основоположников современной фи-

зики. Его имя в первую очередь связывают с обоснованием и развитием статистической физики.

Главной заслугой Больцмана является молекулярно-кинетическое истолкование второго начала термодинамики и установление статистического смысла понятия энтропии.

Состояние тела характеризуется температурой, давлением, плотностью и т. п. Но каждому состоянию соответствуют многие различные случаи распределения молекул и атомов (атомные картины тела). Каждое состояние мы встретим тем чаще, чем больше ему соответствует атомных картин, т. е. чем больше атомных картин, тем бо́льшая вероятность встретить данное состояние. Обозначим эту вероятность W.

Чаще всего мы будем наблюдать состояния, вероятность которых максимальна. Чем меньше вероятность состояния, тем реже оно будет встречаться. Но и очень маловероятные состояния встречаются; в частности, очень маловероятно то состояние газа, в котором он находится в рассматриваемый момент. Больцман по этому вопросу пишет: «Случай, когда все молекулы в газе имеют в точности одинаковые и одинаково направленные скорости, ни на волос не менее вероятен, чем случай, при котором скорость и направление скорости каждой молекулы точно такие, какие она имеет в действительности в определенный момент в газе» [Больцман, 1956а, с. 64].

В другом месте: «Любое, даже и невероятное распределение состояний, имеет хотя и малую, но все же отличную от нуля вероятность. Даже тогда, когда имеет место... случай, когда первая молекула имеет как раз ту скорость, которую на самом деле имеет в этот момент, аналогично вторая и т. д., ничуть не более вероятен, чем случай, когда все молекулы имеют одну и ту же скорость» [Там же, с. 68].

Маловероятно, но возможно и такое состояние, когда все молекулы газа соберутся в одной половине объема. Больцман вычислил, что для объема в 1 см^3 вероятность одновременного нахождения всех молекул газа в одной половине этого объема равна

$$(10^{10^{10}})^{-1}.$$

Без воздействия извне явления развиваются так, что система переходит из менее вероятных состояний в состояния более вероятные. Таким образом, тело достигает своего наивероятнейшего состояния, вблизи которого оно будет испытывать некоторые изменения — флуктуации. Наивероятнейшее состояние является состоянием равновесия. Таким образом, вероятность все время стремится к своему наибольшему значению. Так же ведет себя и энтропия, которая при любых процессах, происходящих в системе, всегда возрастает.

Больцман вводит в рассмотрение функцию H, которая является аналогом энтропии и играет в статистической физике существенную роль.

Пусть в момент времени t

$$f(\xi, \eta, \varepsilon, t)\, d\xi d\eta d\varepsilon = f d\omega$$

означает число молекул m, для которых составляющие скорости в направлении трех координатных осей лежат в пределах между

$$\xi \text{ и } \xi + d\xi, \quad \eta \text{ и } \eta + d\eta, \ \varepsilon \text{ и } \varepsilon + d\varepsilon.$$

Параллелепипед, вершина которого имеет координаты ξ, η, ε, а параллельные координатным осям ребра равны $d\xi$, $d\eta$, $d\varepsilon$, будем называть параллелепипедом $d\omega$.

Если функция f известна для какого-то значения t, то тем самым определено и распределение скоростей молекул m в момент t.

Точно так же пусть будет $F_1(\xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, t)\, d\xi_1 d\eta_1 d\varepsilon_1 = F_1 d\omega_1$ — число молекул m_1, составляющие скорости которых лежат между пределами

$$\xi_1 \text{ и } \xi_1 + d\xi_1, \ \eta_1 \text{ и } \eta_1 + d\eta_1, \quad \varepsilon_1 \text{ и } \varepsilon_1 + d\varepsilon_1.$$

Тогда

$$H = \int f \ln f d\omega + \int F_1 \ln F_1 d\omega_1.$$

Затем доказывается, что в предположении, «что распределение скоростей было в начальный момент молекулярно-неупорядоченным и остается таким и в дальнейшем... величина, обозначенная нами через H, может только уменьшаться» [Там же, с. 63].

Под молекулярно-неупорядоченным распределением Больцман понимает такое состояние, при котором положение и скорость любой из двух сталкивающихся молекул перед столкновением не зависят от положения и скорости другой.

Доказав, что функция H с течением времени не может возрастать, Больцман истолковывает ее, только с обратным знаком, как аналог энтропии. В 1877 г. Больцман указал на связь функции H с вероятностью данного распределения.

Эренфестом было установлено, что одностороннее изменение H основывается на том, что закон столкновения удовлетворяет предположению о полной статистической беспорядочности и не противоречит классической механике.

Вокруг H-теоремы разгорелась дискуссия. В результате последней Больцман вынужден был более внимательно рассмотреть связи этой теоремы с другими вопросами. Это привело его к выводу о статистическом характере второго начала термодинамики.

При любых процессах общее количество энтропии возрастает. Закон неизбежного возрастания энтропии называется вторым началом термодинамики Возникает вопрос: нет ли связи между энтропией S и вероятностью W?

Энтропия двух тел равна сумме энтропий каждого из них ($S = S_1 + S_2$), а их совместная вероятность равна произведению вероятностей отдельных состояний ($W = W_1 W_2$). Следовательно, связь между S и W должна быть логарифмическая: $S = k \ln W$.

Для того чтобы определить коэффициент пропорциональности k, необходимо вычислить S и W для какого-нибудь случая. Такое вычисление было проделано Больцманом для газа. Он нашел, что $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — это постоянная Больцмана, одна из основных универсальных постоянных физики, равная отношению газовой постоянной R к числу Авогадро N: $k = R/N$.

Следовательно, $S = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \ln W$ — это и есть связь между энтропией системы S и ее термодинамической вероятностью, т. е. вероятностью того состояния, которому соответствует данное значение энтропии S. Таким образом, Больцман показал, что энтропия есть мера вероятности пребывания системы в данном состоянии.

Глубокий анализ принципа Больцмана, выраженный в формуле $S = \frac{R}{N} \ln W$, дан Эйнштейном в § 1 работы «Общие замечания о принципе Больцмана».

Относительно второго начала термодинамики Больцман пишет. «То, что в природе энтропия стремится к максимуму, доказывает, что при всяком взаимодействии реальных газов (диффузия, теплопроводность и т. п.) отдельные молекулы вступают во взаимодействие в согласии с законами вероятности или, по крайней мере, что реальные газы всегда ведут себя как воображаемые нами молекулярно-неупорядоченные газы.

Второе начало оказывается, таким образом, вероятностным законом» [Больцман, 1956а, с. 85].

Представления о связи энтропии с вероятностью, интенсивно и глубоко развитые Больцманом, не сразу были восприняты физиками.

Больцман вынужден иногда объяснять те или иные элементарные вопросы теории вероятностей (см., например, [Больцман, 1956а, с. 63, 99 и др.]). Но в своих рассуждениях он часто прибегает не к понятию вероятности, а к количеству молекул, обладающих тем или иным свойством. Причем, по его мнению, такое рассмотрение удобно потому, что «реальное число предметов всегда является гораздо более наглядным понятием, чем простая вероятность» [Там же, с. 71].

В противовес теории тепловой смерти Больцман выдвинул свою флуктуационную гипотезу, которая сыграла прогрессивную роль в борьбе за материалистическое мировоззрение, хотя в настоящее время эта гипотеза представляется недостаточно обоснованной.

По Больцману, возрастание является только наиболее вероятным изменением энтропии. Пусть дана система, состояние которой в момент времени t_0 является маловероятным и которая с течением времени с подавляющей вероятностью переходит к более вероятным состояниям, что и приводит с очень большой вероятностью к возрастанию энтропии, хотя возможны и флуктуации, когда энтропия убывает.

Из обратимости механики тогда вытекает, что до момента t_0 энтропия с такой же большой вероятностью должна была уменьшиться. Наблюдаемая необратимость статистических процессов связана с тем, что сейчас происходит затухание космической флуктуации, а не нарастание. Больцман считает, что к таким мировым процессам применима теория вероятностей. «Так как исчисление вероятностей оправдало себя в столь многих частных случаях, я не вижу никаких оснований, по которым оно не могло бы быть применимым также и в процессах природы более общего характера» [Там же, с. 527—528].

Чтобы быть правильно понятым в вопросе «о возвращении системы к прежнему состоянию», Больцман дает подробные объяснения. В частности, он пишет: «Переход от упорядоченного к неупорядоченному состояниям лишь крайне вероятен. Также и обратный переход имеет известную вычислимую, хотя и невообразимо малую вероятность, которая действительно стремится к нулю только в предельном случае, когда число молекул становится бесконечным. Следовательно, то, что замкнутая система, состоящая из конечного числа молекул, первоначально находившаяся в упорядоченном состоянии и затем перешедшая к неупорядоченному, по прошествии невообразимо длительного (при большом числе молекул) времени должна снова принимать упорядоченное состояние, не только не опровергает нашу теорию, но даже является ее подтверждением.

Не следует, однако, представлять себе дело таким образом, что два газа, которые первоначально находились несмешанными в сосуде с абсолютно гладкими индифферентными стенками емкостью $^1/_{10}$ литра, смешиваются, через несколько дней снова разделяются, затем снова смешиваются и т. д. Напротив, согласно тем же принципам получается, что после первого смешения снова произошло бы сколько-нибудь заметное разделение лишь спустя время, несравненно много большее чем $10^{10^{10}}$ лет» [Там же, с. 522].

Больцман считал, что статистические методы применимы и к изучению электромагнитных волн. Он писал: «Точно так же, как и в теории газов, можно определить для излучения вероятнейшее состояние... при котором волны не упорядочены, а разнообразнейшим образом взаимодействуют между собой» [Boltzmann, 1909, с. 617]. Это мнение разделяет и М. Планк, когда он пишет, что попытка понять смысл законов изучения «естественно привела меня к рассмотрению связи между энтропией и вероятностью, т. е. к больцмановскому ходу мысли» [Plank, 1944, с. 102].

Влияние Больцмана на развитие физики очень велико. В частности, развитие Больцманом статистических представлений подготовило создание квантовой теории, эти представления являются одним из ее истоков.

Больцман с материалистических позиций выступал против идеалистических воззрений Маха, Оствальда, Шопенгауэра, против идеализма вообще. Он писал: «Имя Беркли принадлежит

весьма уважаемому английскому философу, которому даже приписывается изобретение самой большой глупости, измышленной когда-либо человеческим умом,— философского идеализма, отрицающего существование материального мира» (цит. по: [Брода, 1957, с. 51]).

В своей лекции «По поводу одного тезиса Шопенгауэра» Больцман пишет: «Я было избрал для своей лекции такое заглавие „Доказательство, что Шопенгауэр — бессмысленный, невежественный, размазывающий глупости, набивающий голову пустопорожней болтовней и тем доводящий их до полного дегенератства философастр“. Слова эти я буквально заимствовал из Четвертого корня и т. д., только там они относятся к другому философу, Шопенгауэру приводят в извинение, что он был взбешен тем, что его обошли при назначении на какую-то вакансию. Но спрашивается, чей гнев более правдивый — его или мой?» [Больцман, 1956б, с. 444]. Из этой цитаты совершенно ясно отношение Больцмана к Шопенгауэру. Далее он пишет: «Шопенгауэрское учение в своих подробностях не выдерживает критики. Многое в нем прямо-таки комично, например, его уподобление басов минеральному царству, средних регистров — растениям и животным, а дисканта — человеку» [Там же, с. 451].

Больцман заканчивает свою лекцию уверенностью, что «человечество избавится от той умственной мигрени, имя которой — метафизика» [Там же, с. 464].

К. Тимирязев дает высокую оценку Больцману. Он называет его физиком-антиметафизиком, физиком-философом, одним из самых блестящих представителей этой науки.

В. И. Ленин в «Материализме и эмпириокритицизме», подчеркивая борьбу Больцмана против идеализма и махизма, приводит ряд цитат из его произведений [Ленин, т. 18, с. 95 и в других местах].

Ряд физиков и до Больцмана рассматривали тела как состоящие из очень большого числа частиц и считали, что они поэтому могут быть исследованы только статистически.

Уже Д. Бернулли предложил объяснить движением молекул давление, оказываемое газом на стенки сосуда. К аналогичным взглядам пришел и М. В. Ломоносов. Непосредственным предшественником Больцмана был Максвелл, который рассматривал молекулы как упругие тела. Исходя из этого представления он построил свою теорию газов, которая примыкает к работам Клаузиуса. В обзорной лекции, прочитанной в 1875 г. в Лондонском химическом обществе, Максвелл говорил, что основная заслуга Клаузиуса состоит в том, что, разработав приемы для изучения систем, состоящих из бесчисленного множества движущихся молекул, он создал новую область математической физики. Клаузиус распределил молекулы по группам соответственно их скоростям. Так как невозможно наблюдать события, относящиеся к отдельным молекулам, Клаузиус учитывал изменения числа молекул в раз-

личных группах. В своей лекции Максвелл говорил: «Следуя этому методу, единственно возможному как с точки зрения экспериментальной, так и математической, мы переходим от строго динамических методов к методам статистики и теории вероятностей. При столкновении двух молекул они переходят из одной группы в другую, но за время большого числа столкновений число молекул, вступающих в каждую группу, в среднем не больше и не меньше числа покинувших ее за тот же промежуток времени. Когда система достигла этого состояния, число молекул в каждой группе должно быть распределено согласно некоторому определенному закону» (цит. по: [Кузнецов, 1955, с. 148—149]). Этот закон, закон распределения скоростей молекул, и вывел Максвелл в 1859 г. При этом он рассуждал следующим образом.

Пусть $\varphi(x)\,dx$ есть вероятность того, что проекция скорости молекулы на ось Ox заключена между x и $x + dx$, аналогично $\varphi(y)\,dy$ и $\varphi(z)\,dz$ будут вероятности того, что проекции скорости на оси Oy и Oz будут заключены в пределах y и $y + dy$, z и $z + dz$. Вероятность, что вектор, изображающий скорость и исходящий из начала координат, заканчивается в фигуре x, y, z, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ равна

$$p = \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)\,dxdydz.$$

Но эта вероятность должна быть функцией расстояния от начала координат: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, т. е.

$$\varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z) = f(x^2 + y^2 + z^2).$$

Логарифмируем это уравнение: $\ln\varphi(x) + \ln\varphi(y) + \ln\varphi(z) = \ln f(x^2 + y^2 + z^2)$. Берем производную по x

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{2xf'(x^2+y^2+z^2)}{f(x^2+y^2+z^2)} \text{ или } \frac{\varphi'(x)}{x\varphi(x)} = \frac{2f'(x^2+y^2+z^2)}{f(x^2+y^2+z^2)}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\varphi'(y)}{y\varphi(y)} = \frac{\varphi'(z)}{z\varphi(z)} = \frac{\varphi'(x)}{x\varphi(x)} = \frac{2f'(x^2+y^2+z^2)}{f(x^2+y^2+z^2)}.$$

Учитывая некоторые дополнительные физические соображения, легко подобрать функцию, которая удовлетворяет этому соотношению:

$$\varphi(x) = e^{-k^2x^2}, \qquad \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z) = f(x^2 + y^2 + z^2) = e^{-k^2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Последнее соотношение и представляет закон распределения скоростей Максвелла. Согласно этому закону, число молекул, составляющие скорости которых находятся в указанных выше пределах, равно

$$Ae^{-k^2(x^2+y^2+z^2)}dv, \text{ где } dv = dx\,dy\,dz.$$

Бертран возражал против этого рассуждения. Он считал, что нет уверенности, что пределы проекции на Oy (y и $y + dy$) независимы

от вероятности того, что пределы проекции на Ox будут x и $x + dx$. В этом случае нельзя утверждать, что равенство $p = \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)\,dxdydz$ справедливо. Позже было установлено, что эти события независимы, так что возражение Бертрана отпало.

Больцман доказал закон распределения Максвелла, рассматривая столкновение молекул. Даже если предположить, что в какой-то момент все молекулы имеют одинаковую скорость, через некоторое время в результате столкновений распределение молекул по скоростям будет случайным, подчиненным закону распределения Максвелла.

Отметим, что сам термин «статистическая механика» был введен Максвеллом.

Клаузиус, Максвелл и другие, конечно, получили некоторые результаты, относящиеся к статистической физике (например, закон распределения скоростей Максвелла), но в их работах вероятностные рассуждения и статистический подход были еще эпизодическими.

Только Больцман и Гиббс ввели последовательно вероятностные рассуждения и статистику в физику.

К проблемам статистической механики Гиббс (1839—1903) обратился еще в начале 80-х годов, но только примерно через 10 лет они заняли в его творчестве основное место [1].

В 1892 г. Гиббс писал английскому физику Д. Рэлею: «В настоящее время стараюсь подготовить к опубликованию кое-что по термодинамике́ с априорной точки зрения, или, вернее, по „статистической механике", где основное внимание было бы направлено на ее применение к термодинамике по линии Максвелла и Больцмана» (цит. по: [Франкфурт, Френк, 1964, с. 124]).

В это же время Гиббс начал читать курс статистической физики в Йельском университете.

Гиббс опубликовал в 1902 г. книгу «Основные принципы статистической механики» [Гиббс, 1946]. Эта монография имела огромное значение для развития теоретической физики. Гиббс сделал значительный шаг в развитии статистической физики. Классическая статистическая физика, созданная трудами в первую очередь Максвелла и Больцмана, нашла в этой работе продолжение и логическое завершение.

Гиббс рассматривает свойства тела как свойства ансамбля, состоящего из огромного числа мельчайших частиц, которые подчинены законам механики. Он изучает свойства такого ансамбля, опираясь на теорию вероятностей, выясняет фундаментальную роль самого понятия вероятности в физике. Это понятие позволяет произвести глубокий анализ макроскопических свойств вещества.

---

[1] Гиббсу и его работам посвящена большая литература. В книге Франкфурта и Френка [Франкфурт, Френк, 1964] приведена довольно полная библиография.

Гиббс показал связь этих свойств со средними статистическими свойствами ансамблей. Он широко использовал идею Больцмана, состоящую в интерпретации энтропии как вероятностного состояния системы. Гиббс правильно поставил проблему, возникшую еще у Больцмана и состоящую в разрешении противоречия между термодинамической необратимостью, вытекающей из закона возрастания энтропии, и обратимостью законов движений, т. е. обратимостью во времени всех чисто механических процессов.

Физические измерения, как мы неоднократно подчеркивали, всегда содержат некоторую ошибку, они никогда не являются точными. Результат действия какой-либо системы является следствием не из точно заданных начальных положений, а из начальных положений, известных только своими распределениями. Уже по этой причине в физику должно было войти учение о случайных величинах и вероятностные соображения.

Гиббс считал, что физика не говорит о результатах, которые происходят всегда, а говорит о результатах, которые происходят с большой вероятностью.

Хотя идеи Гиббса глубоко проникли в теоретическую физику, его работы оказывались часто незавершенными. В частности, это было вызвано отсутствием или плохой разработкой соответствующих разделов теории вероятностей. «Введение Гиббсом вероятности в физику произошло задолго до того, как появилась адекватная теория того рода вероятностей, которые ему требовались» [Винер, 1958, с. 26].

В книге «Основные принципы статистической механики» Гиббс характеризует цели и задачи статистических методов в физике.

Обычной точкой зрения в изучении механики была та, при которой внимание направлено на изменения, происходящие с течением времени в данной системе. При этом рассматривается состояние системы в любой момент времени. Иногда рассматриваются состояния, бесконечно мало отличающиеся от действительного состояния системы.

«Для некоторых целей, однако, желательно принять более широкую точку зрения. Мы можем представить себе большое число систем одинаковой природы, но различных по конфигурациям и скоростям, которыми они обладают в данный момент, и различных не только бесконечно мало, но так, что охватывается каждая мыслимая комбинация конфигураций и скоростей. При этом мы можем поставить себе задачей не прослеживать определенную систему через всю последовательность ее конфигураций, а установить, как будет распределено все число систем между различными возможными конфигурациями и скоростями в любой требуемый момент, если такое распределение было задано для какого-либо момента времени. Основным уравнением при таком исследовании является уравнение, дающее скорость изменения числа систем, заключенных внутри определенных малых границ конфигурации и скорости.

Такие исследования Максвелл назвал статистическими» [Гиббс, 1946, с. 12].

Гиббс рассматривает вероятность того, что произвольная система ансамбля, о которой мы знаем только то, что она относится к ансамблю, находится внутри данных границ, и устанавливает принцип сохранения вероятности фазы. «Мы получаем принцип, который в зависимости от точки зрения, с какой он рассматривается, можно выражать различно — как принцип сохранения фазовой плотности, фазового объема или вероятности фазы... Мы сочетаем принцип сохранения вероятности фазы, являющийся точным, с теми приближенными соотношениями, которые обычно принимаются в теории ошибок» [Там же, с. 15].

Максвелл и первоначально Больцман считали, что газовая масса состоит из очень большого числа молекул, статистические особенности движения которых необходимо изучать. Более поздняя точка зрения Больцмана, а затем и Гиббса состояла в том, что они рассматривали очень большое число тождественных друг другу газовых масс. Но в этих тождественных массах движение молекул неодинаково.

Рассматривая достаточно большое число таких масс и изучая наиболее часто встречающиеся свойства этих масс, Больцман и Гиббс тем самым стали на точку зрения статистической механики.

Идеи Гиббса были восприняты многими восторженно. Например, Больцман писал: «Честь систематизировать эту науку, изложить ее в стройном сочинении и дать ей характерное имя принадлежит одному из величайших американских ученых, быть может, величайшему в области абстрактного мышления и теоретического исследования,— Вилларду Гиббсу... Он назвал эту науку статистической механикой» (цит. по: [Франкфурт, Френк, 1964, с. 123—124]). Приведем еще высказывание о Гиббсе американского физика Р. Милликэна: «Будучи глубоким, не имеющим себе равных ученым-аналитиком, он сделал для статистической механики и термодинамики то, что для небесной механики сделал Лаплас, а для электродинамики — Максвелл, а именно—он сделал свою область науки почти законченным теоретическим построением» [Там же, с. 125].

В первое десятилетие нашего века благодаря статьям Планка, Лоренца, Эренфеста и других статистический подход Гиббса стал достоянием широких кругов ученых.

Итак, Больцман и Гиббс широко применяли в своих исследованиях вероятностные соображения, в частности само понятие вероятности. Но это понятие и вероятностные рассуждения не совсем те, с которыми имели дело математики. Например, Гиббс вводит такие понятия, как коэффициент вероятности фазы $p = D/N$, где D — фазовая плотность, N — полное число систем. Ни математики, ни физики того времени не считали, что они рассматривают одно и то же понятие вероятности, а в науке не было метода, при помощи которого можно было бы свести друг к другу эти, ка-

залось бы, далекие друг от друга понятия физики и математики. Это несоответствие между вероятностными понятиями, применяемыми в физике и математике, продолжалось еще довольно долго. Приведем еще один пример.

В своих работах, в первую очередь связанных с теорией броуновского движения [Эйнштейн, 1966а и др.], Эйнштейн широко использует вероятностные понятия и рассуждения. Но не имея, как писал Винер о Гиббсе, адекватной теории «того рода вероятностей, которые ему требовались», Эйнштейн вводит некоторые новые понятия. Так, в работе [Эйнштейн, 1966 в] он пишет о том, что связанные с изучением величины, такие, как напряженность электрического или магнитного поля в теории теплового излучения, действующая на резонатор сила, выражаются рядами Фурье общего вида: $\sum\left(A_n \sin 2\pi n \frac{t}{T} + B_n \cos 2\pi n \frac{t}{T}\right)$, где t означает время, а T — очень большой промежуток времени, для которого ряд сходится. При вычислении средних значений «коэффициенты A_n, B_n считаются независимыми, причем предполагается, что каждый коэффициент независимо от численных значений других коэффициентов подчиняется закону гауссовского распределения, так что вероятность dW комбинации значений A_n, B_n можно представить просто как произведение вероятностей отдельных коэффициентов» [Там же, с. 196—197].

Здесь вводится понятие «вероятность коэффициентов», которое требует дополнительного объяснения, так как в этом случае вероятностью характеризуется не событие. В примечании редакции тома к этому месту написано: « „Вероятность коэффициента“ следует понимать, очевидно, таким образом. Представим себе, что напряженность электрического поля разлагается в ряды Фурье для очень многих моментов времени. Доля разложений, в которых данный коэффициент лежит в некоторой определенной области значений, и есть вероятность этой области значений рассматриваемого коэффициента» [Там же, с. 196].

Роль статистических методов в физике все время возрастает. Они занимают важное положение в физических исследованиях. «Сегодня можно сказать, что современная физика полностью опирается на статистическую основу»,— говорил Борн в 1935 г. [Борн, 1953, с. 58]. Конечно, это теснейшим образом связано с развитием атомистики, так как наличие громадного числа элементарных частиц делает невозможным их детерминистическое описание.

Итак, не вызывает сомнения, что статистические методы исследования играют важную роль в физических исследованиях, многие законы физики, возможно, даже большинство из них, носят статистический характер. Без правильного понимания того, чем обусловлен статистический характер этих законов физики, создается впечатление, что в основе всех статистических законов лежит случайное поведение множества мелких частиц, т. е. в основе этих законов лежит случай.

Статистические методы исследований обусловлены тем, что случайные явления сами подчинены закону, а это возможно потому, что в основе случайных явлений, подчиняющихся закону, лежит в свою очередь нестатистическая закономерность.

Для выяснения этого положения рассмотрим центральную предельную теорему в том виде, в каком ее сформулировал П. Л. Чебышев: Если математические ожидания величин u_1, u_2, u_3, ... равны нулю, а математические ожидания всех их степеней имеют числовую величину ниже какого-либо конечного предела, вероятность, что сумма n величин $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ делится на квадратный корень из удвоенной суммы математических ожиданий их квадратов, заключается между двумя какими-нибудь величинами t и t', с возрастанием числа n до ∞ имеет пределом величину интеграла $\frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_t^{t'} e^{-x^2} dx$.

Для того чтобы случайные величины подчинялись теореме Чебышева, они должны — как указывается в самой теореме — подчиняться некоторым условиям: 1) их математические ожидания должны быть равны нулю; 2) математические ожидания всех их степеней ограничены. А это означает, что примерно одинаковые отклонения случайной величины как в одну сторону, так и в другую (если рассматривать линейный случай) встречаются в среднем одинаково часто и, кроме того, исключена возможность больших отклонений. Следовательно, для того чтобы случайная величина подчинялась теореме Чебышева, необходимо, чтобы в основе ее поведения была заложена некоторая закономерность. Так происходит во всех случаях: в основе поведения любой случайной величины, которая подчиняется законам, заложены неслучайные закономерности.

Для большого класса явлений такой неслучайной закономерностью является непрерывность распределения (скоростей, сил или других величин).

Разработка вопросов статистической физики, проникновение вероятностных методов в физические исследования требовали дальнейшего развития самой теории вероятностей, а также взглядов на вероятность.

Но следует отметить, что математики конца XIX в. довольно долго не рассматривали физику как область приложения теории вероятностей. В науке сложилась такая ситуация: с одной стороны, физики, широко применяя вероятностные соображения, не используют работ математиков, а математики, обращаясь к различным приложениям теории вероятностей, избегают физики. Статистическая физика и теория вероятностей развиваются параллельно, как бы не замечая друг друга.

Мне думается, что создавшееся положение можно объяснить следующим образом. В то время, когда у физиков возникла потребность широкого применения вероятностных понятий и методов

в своих исследованиях, математика могла им предложить только классическое определение вероятности, которое физиков ни в коей мере не удовлетворяло. Физики отказались от этого определения и стали вводить понятия, приспособленные к своим исследованиям: вероятность фазы, вероятность состояния тела и т. п. Не найдя в математике нужных основных понятий, физики не рассмотрели тех методов, которые могли быть применимы ими (например, цепи Маркова).

Математики же считали, что введенные физиками различные вероятности — не строгие понятия и они не поддаются математическому описанию и что эти понятия не имеют ничего общего с математическими вероятностями. Поэтому математики не входили в область физики и не применяли математический аппарат теории вероятностей к физическим исследованиям.

Такое параллельное развитие статистической физики и теории вероятностей долго продолжаться не могло. Оно подчеркивало необходимость уточнения основных понятий теории вероятностей, а также определения предмета теории вероятностей. Приведение в логический порядок основ теории вероятностей требовало как развития математики, так и развития физики.

4. Трудности в обосновании применения вероятности в начале XX в.

К началу XX в. теория вероятностей, с одной стороны, получила блестящее развитие в трудах ученых русской школы и нашла глубокое применение в физике; с другой стороны, в этот же период появляются совершенно необоснованные приложения теории вероятностей.

Отдельные математики стали использовать теорию вероятностей в политических целях. Особенно в этом отличился П. А. Некрасов (1853—1924). В 1896 г. Некрасов издает «Теорию вероятностей», которая является изложением его лекций в Московском университете и Межевом институте. В 1912 г. эта книга выходит вторым изданием, существенно дополненным [Некрасов, 1912].

При чтении этой книги поражает обилие бессвязных наукообразных фраз, хотя они часто относятся к основным принципиальным понятиям теории вероятностей.

Приведем пример. «Теория вероятностей есть врожденная категорическая функция, мысленно превосходящая сменные явления природы и многообразно согласующаяся с функциями души и тела. Роль вероятностей (т. е. условных и безусловных достоверностей) по вопросам жизни и многосторонне посредническая, междусубъективная в регулировании течений блага, строящая систему посредствующих, ограждающих и искупающих запасов, залогов, божков для умного выпуска явлений против многообразных (типических) „огневых“ народных бедствий, и устанавливающая исчислением, измерением, формулами и словом или иными знаками

и графиками критерии средства и соотношение или связь (интеграцию, интерполяцию) между составными частями, секциями и самостоятельными органами живого Всего (Целого) и их функциями» [Там же, с. III].

Такого типа высказываний о теории вероятностей и ее основных понятиях у Некрасова много не только в цитируемой выше книге (см., например, [Некрасов, 1904]).

В 1915 г. Некрасов как член Совета министерства народного просвещения совместно с профессором Юрьевского университета В. Г. Алексеевым и некоторыми педагогами создали комиссию для введения элементов теории вероятностей в программу средних школ (гимназий). По проекту этой программы предполагалось использовать теорию вероятностей для воспитания учащихся в духе повиновения царю, восхваления порядка самодержавия и т. п.

Для реализации своего проекта авторы предлагали ознакомить учеников средней школы с работами Некрасова и статьей Флорова [Флоров, 1893], которая посвящена свидетельским показаниям.

А. А. Марков, выступая против этого проекта в целом, в частности, заявлял, что этот проект делает попытку ввести в программу средней школы самый слабый раздел теории вероятностей — раздел о свидетельских показаниях. Более того, Марков считает, что этот раздел с полным основанием можно опустить и в университетском курсе теории вероятностей. Марков справедливо считал такое применение теории вероятностей малообоснованным.

После того, как Марков узнал о созданной Некрасовым комиссии, по его инициативе в Академии наук была создана другая комиссия в составе Д. К. Бобылева, А. Н. Крылова, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова и В. А. Стеклова, которая приняла по этому вопросу решение, где, в частности, говорилось: «Взгляды Некрасова давно известны математикам, но пока они находили место в специальных математических журналах, их можно было считать безвредными. Дело меняется, когда распространителем их является официальный орган. Поэтому Академия наук обязана высказать свое суждение об основных ошибках и неправильных, а потому вредных идеях, распространяемых П. А. Некрасовым с целью проведения их в обиход средней школы... Комиссия полагает, что вышеупомянутые заблуждения и... злоупотребление математикой с предвзятой целью превратить науку в орудие религиозного и политического воздействия... принесут неисправимый вред делу просвещения» [1].

Получив такой отпор, Некрасов решил обвинить А. А. Маркова в пропаганде материализма. Он писал: «Для суждения о том, что действительно непригодными для подготовления учителей средней школы являются не инкриминируемые мне идеи, а идеи А. А. Маркова, предложу вниманию читателя руководство А. А. Маркова „Исчисление вероятностей“» [Некрасов, 1916, с. 12]. Далее Не-

[1] Историко-математические исследования, вып. IV, с. 178.

красов ссылается на приведенную выше цитату из книги Маркова, в которой последний не соглашается с Буняковским относительно существования известного класса рассказов, сомневаться в которых, даже если они кажутся невероятными, предосудительно. После этого Некрасов заявляет:

«Разрушая приведенные выше основоположения академика Буняковского, Марков тем самым облегчает насаждение основоположений исторического материализма... Лучшего, чем книга Маркова, руководства не требуется для систематической пропаганды крайнего беспочвенного материализма» [Там же, с. 16] [1].

К. А. Тимирязев оценивает работы Некрасова как «реакционно-схоластические, почти бредовые словоизвержения» математика, «выдающего себя за представителя целой школы» [Тимирязев, 1908, с. 344] [2].

Потребность в пересмотре логических основ теории вероятностей, закрепление за ней права настоящей математической дисциплины чувствовались все сильнее.

В связи с тем, что не было ясности в вопросе о предмете теории вероятностей, даже такой крупный математик как Э. Борель (1871—1956), не избежал увлечения совершенно необоснованными ее применениями, распространяя ее на такие области, которые не имеют отношения к математической дисциплине.

В 1914 г. вышла его очень интересная книга «Случай», которая в 1923 г. была переведена на русский язык [Борель, 1923]. В этой книге рассматривается очень много важных вопросов. После подробного обсуждения основных законов теории вероятностей с глубокими историческими и философскими отступлениями Борель говорит о проникновении вероятностных методов в физику, биологию и другие науки, о связи теории вероятностей с другими разделами математики.

Но наряду с этим мы, например, читаем: «Представим себе тысячу москвичей, проходящих мимо семиэтажной недвижимости; они все согласятся назвать это домом; между тем как они откажут в таком названии каменной постройке, могущей служить приютом двум кроликам и трем курицам. Возьмем теперь среднюю постройку, тут мнения могут разделиться, если 748 из 1000 подающих голос выскажутся за название данного здания домом, то будет правильно утверждать, что вероятность, чтобы здание было домом, равна 0,748, а противоположная вероятность — 0,252» [Там же, с. 88].

Такое произвольное толкование вероятности могло возникнуть только в результате неотчетливости и неочерченности этого понятия. Борель привлекает теорию вероятностей к социальным,

---

[1] О борьбе А. А. Маркова за материализм в науке против всяких идеалистических извращений, а также о его активной поддержке всего передового в культурной жизни России см. [Кольцов, 1956, Марков (мл.), 1951 и др.]

[2] Подробнее о взглядах Некрасова и борьбе с ними Маркова см. [Майстров, 1967].

моральным и другим подобным вопросам: «Можно ли идти дальше и построить на основе теории вероятностей настоящую индивидуальную и социальную мораль?.. Самое возвышенное правило морали, когда либо предлагавшееся людям, казалось бы, заключается в евангельской заповеди: „люби ближнего, как самого себя“» [Там же, с. 168—169].

Далее он обсуждает эту евангельскую заповедь и приходит к выводу: «Единственное разумное толкование, которое можно дать евангельскому изречению, следующее: рассматривай каждого твоего ближнего, как величину, эквивалентную во всяком случае не тебе самому, а какой-нибудь части тебя, заключающейся между нулем и единицей, но никогда не достигающей нижнего предела нуля и иногда достигающей верхнего предела единицы. Не думаю, чтобы такую формулировку можно было назвать эгоистической; если хорошенько понять ее значение, то становится ясным, что она, напротив, является самым широким и самым полным выражением разумного альтруизма. Различные степени альтруизма и эгоизма проявляются при определении коэффициентов: скольким лицам каждый из нас припишет коэффициент 1, скольким коэффициент 0,9, коэффициент 0,5, . . ., коэффициент 0,000001. Я не стану входить в обсуждение этих величин, которое входит в компетенцию практической морали; существенно то, что эти коэффициенты не должны равняться нулю, и это положение можно принять за основу теоретической морали. При установлении этого факта и при изучении его последствий теория вероятностей появляется на каждом шагу» [Там же, с. 169—170].

Сейчас никто из изучающих теорию вероятностей, даже в самом элементарном объеме, не может принимать всерьез такие высказывания.

Борель вводит понятие относительной вероятности, понимая под этим отношение числа благоприятных исходов к числу неблагоприятных $(m/(n-m))$ или отношение вероятности события к вероятности его отрицания $\frac{m/n}{(n-m)/n}$. Это понятие также не прижилось в науке, оно оказалось неплодотворным.

Даже такой математик, как Борель, довольно расплывчато представлял себе предмет и метод теории вероятностей и само понятие вероятности. Борель понимал, что теорию вероятностей необходимо усовершенствовать. Он писал: «Применение к точным наукам усовершенствует теорию вероятностей» [Там же, с. VI].

Интересно отметить, что другая его книга «Вероятность и достоверность», написанная в 1950 г. [Борель, 1969], затрагивает многие принципиальные и важные вопросы теории вероятностей, но не содержит никаких необоснованных применений, так как в это время теория вероятностей уже была полноправной математической дисциплиной.

Неточность, непонимание и путаница относительно вероятностных и статистических методов существовали довольно долго. При-

ведем еще примеры. В предисловии к русскому переводу книги Бореля редактор перевода В. А. Костицын писал: «Успехи физики и астрономии выдвинули статистический метод на первое место в современном естествознании» [Там же, с. VIII]. И далее: «Поле гипотез относительно молекулярного мира все более сужается, и недалек тот день, когда строение атома и междуатомные силы нам будут хорошо известны. Тогда снова вступит в свои права здоровый научный детерминизм, а статистические естественные законы будут лишь временным этапом нашего познания» [Там же, с. X].

Мы видим, что этот прогноз не сбылся, статистические законы проникают во все более широкие сферы современного естествознания, и это определяется не уровнем наших знаний, а структурой явлений, которые изучаются естествознанием.

Непосредственным предшественником создания аксиоматики в теории вероятностей был А. Пуанкаре (1854—1912) — крупнейший математик и физик конца XIX и начала XX в. Среди его богатого научного наследия вопросы теории вероятностей занимают довольно скромное место.

Пуанкаре принадлежит ряд книг и статей философского характера, в которых он иногда затрагивает и философские, методологические вопросы теории вероятностей [Пуанкаре, 1904, 1910]. Кроме того, он написал книгу «Исчисление вероятностей», изданную в 1912 г. [Poincaré, 1912].

В своих философских работах Пуанкаре стоял на позициях идеализма и махизма. В. И. Ленин в «Материализме и эмпириокритицизме» дал справедливую критику философских взглядов Пуанкаре, назвав его французским махистом, а его гносеологические выводы — идеалистическими. Философские взгляды Пуанкаре неоднократно подвергались критике в нашей литературе.

Однако это не должно умалить его специальных работ по физике и математике. Пуанкаре был крупнейшим ученым. В.И. Ленин называет его известным французским физиком.

Книга Пуанкаре «Исчисление вероятностей» является одной из строгих и интересных книг по теории вероятностей начала нашего столетия. Мы остановимся на некоторых общих положениях этой книги.

Он определяет случайное событие с позиций детерминизма. «Очень малая, ускользающая от нас причина определяет значительный результат, который мы не можем не видеть; если это происходит, мы приписываем результат случаю.

Если бы мы точно знали законы природы и положение Вселенной в момент ее возникновения, то мы могли бы точно предсказать положение этой Вселенной в последующий момент». И далее: «Может случиться, что небольшие различия в первоначальных условиях порождают значительные различия в конечных явлениях: маленькая ошибка относительно первых может породить громадную ошибку относительно вторых. Предсказание становится невозможным, и мы имеем случайное явление» [Там же, с. 4—5].

Пуанкаре рассматривает ряд примеров случайных событий. 1. Неустойчивое равновесие конуса, поставленного на вершину. Нам неизвестно, в какую сторону упадет конус. 2. Метеорологические явления. Мы не можем предсказать точно, где зародится циклон. «Здесь мы вновь находим тот же контраст между весьма малой причиной, не поддающейся оценке наблюдения, и весьма значительными результатами, которые иногда представляют собой опустошительные бедствия» [Там же, с.6]. 3. Распределение малых планет между зодиакальными созвездиями. «Весьма небольшие первоначальные различия между их расстояниями от Солнца, или, что сводится к тому же, между их средними движениями, в конце концов дали громадные различия между их современными долготами... Малая причина и большой результат, или, лучше, малые различия в причине и большие различия в результате» [Там же, с. 6]. 4. Игра в рулетку.

Во всех этих примерах случайные события рассматриваются как события, у которых очень малые различия в первоначальных условиях приводят к ощутимым различиям в результатах. Кроме таких случайных событий, Пуанкаре рассматривает события, случайный результат которых объясняется сложностью и большим количеством причин. К такому типу случайных событий он относит различные события, взятые из кинетической теории газов, а также случайное распределение дождевых капель на какой-нибудь поверхности, распределение взвешенных крупинок в сосуде с жидкостью, распределение карт в колоде в результате хорошей тасовки, случайные ошибки в наблюдениях. «Здесь опять мы имеем малые причины, но каждая из них порождает малый результат; их результат становится страшным в силу их соединения и их большого числа» [Там же, с. 10].

Пуанкаре рассматривает еще третий тип случайных явлений, который, как он сам считает, сводится к первым двум типам. Он рассматривает следующий пример: кровельщик роняет черепицу, которая убивает проходящего мимо человека. «Человек не думает о кровельщике, и кровельщик о человеке, они представляются принадлежащими к двум совершенно чуждым друг другу мирам. И, однако, кровельщик роняет черепицу, которая убивает человека, и никто не поколеблется сказать, что это случай.

Наша слабость не позволяет нам обнять целиком всю Вселенную и заставляет нас разделять ее на части. Мы пытаемся делать это, насколько возможно, менее искусственно, и тем не менее время от времени происходит, что эти части влияют друг на друга. Результаты этого взаимного действия представляются нам тогда вызванными случаем... Всякий раз, когда два мира, совершенно чуждые друг другу, приходят во взаимодействие, законы этой реакции могут быть только очень сложными, и, с другой стороны, было бы достаточно весьма малого изменения в первоначальных условиях этих двух миров, чтобы эта реакция не имела места. Нужно было очень немного, чтобы человек прошел секундой позже или

чтобы кровельщик уронил черепицу секундой раньше» [Там же, с. 11].

Далее Пуанкаре ставит вопрос: почему случай подчиняется закону? Он возвращается к примеру с рулеткой. Игла рулетки останавливается в том или ином секторе в зависимости от получаемого импульса. Вероятность того, что импульс будет заключен между a и $a+\varepsilon$, равна вероятности, что он заключен между $a+\varepsilon$ и $a+2\varepsilon$ при достаточно малых ε. «Это свойство всех аналитических функций. Малые изменения функций пропорциональны изменениям аргументов» [Там же, с. 12]. Пуанкаре считает, что случай подчинен закону, потому что распределение случайностей носит характер непрерывности. Но, с другой стороны, объясняя, почему в природе существует непрерывность, он говорит, что сама непрерывность определяется взаимодействием множества случайностей.

«В беге истории... действовали разные сложные причины, и действовали долго: они способствовали смеси элементов и стремились сделать все однообразным, по крайней мере, в небольших пространствах; они сглаживали углы, сравнивали горы, заполняли долы. Какая бы ни встретилась им капризная и неправильная кривая, какая только возможность была первоначально, они столько работали над ее выправлением, что, в конце концов, она стала непрерывной. Вот почему мы и получили право с полной уверенностью допускать непрерывность» [Пуанкаре, 1910, с. 67].

Пуанкаре считает, что «наука детерминична; она таковой является a priori, она постулирует детерминизм» [Пуанкаре, 1923, с. 127]. Пуанкаре отводит вероятности только области, которые нами не изучены, которые мы не знаем. «Проблемы вероятности могут быть, таким образом, классифицированы по большей или меньшей глубине незнания» [Пуанкаре, 1904, с. 207].

«Случай — только мера нашего невежества. Случайными явлениями, если попытаться дать им определение, будут те, законов которых мы не знаем» [Пуанкаре, 1910, с. 51].

Свою вероятностную концепцию Пуанкаре распространяет на всю историю человечества.

«Что означают слова „очень малый"... Разница является очень малой, интервал является очень малым, когда в границах этого интервала вероятность остается постоянной. Почему эта вероятность может рассматриваться в малом интервале как постоянная? Потому, что мы допускаем, что закон вероятности выражается непрерывной кривой... Что дает нам право сделать это предположение?.. Это то, что в течение столетий существуют сложные причины, которые не прекращают своего действия в одном и том же направлении и которые постоянно ведут Вселенную к однообразию, без возможности возврата назад. Именно эти причины постепенно смягчили выступы и заполнили углубления, и именно поэтому наши кривые вероятностей имеют легкую волнистость.

В течение миллиардов миллиардов столетий будет сделан дальнейший шаг к однообразию, и эти колебания станут в десять раз

меньшими: средний радиус кривизны нашей кривой станет в десять раз больше. И тогда такая длина, которая сегодня не кажется нам очень малой, потому что в нашей кривой дугу этой длины нельзя рассматривать как прямую линию, должна будет, наоборот, в ту эпоху рассматриваться как очень малая, поскольку ее кривизна в десять раз меньше и дуга этой длины может быть приравнена к прямой.

Таким образом, слова „очень малый" остаются относительными, но они являются относительными не по отношению к тому или иному человеку, а лишь по отношению к современному состоянию Вселенной. Они изменят свой смысл, когда мир станет более однообразным, когда все вещи смешаются более тесно. Но тогда, без сомнения, люди не смогут более жить и должны будут уступить место другим существам» [Poincaré, 1912, с. 16—17].

Переходя к определению вероятности и останавливаясь на классическом определении, он пишет: «Как определить, что все случаи являются равновозможными? Математическое определение в данном случае не является возможным, мы должны будем при каждом применении ставить условия, оговаривать, что мы будем рассматривать такой и такой случай как равновозможные. Эти допущения не являются совершенно произвольными, но ускользают от математика, который после того, как они сделаны, не подвергает их анализу» [Там же, с. 28].

Мы видим, что Пуанкаре своими критическими замечаниями требовал более четкого и строгого отношения к основным понятиям теории вероятностей. Его курс теории вероятностей был одним из лучших курсов для своего времени.

На необходимость уточнения основных понятий теории вероятностей математики указывали неоднократно. В этом отношении любопытна позиция Ж. Бертрана (1822—1900).

Бертран выдвинул ряд парадоксов, относящихся к основным понятиям теории вероятностей [Betrand, 1899]. Один из них состоит в следующем. Требуется определить вероятность того, что взятая произвольно хорда окружности будет больше, чем сторона вписанного в нее равностороннего треугольника.

По-разному понимая слова «взятая произвольно», мы будем получать разные вероятности. Так, рассматривая только те хорды, которые параллельны данному направлению, мы получим, что искомая вероятность равна $^1/_2$. Действительно, в этом случае хорды, большие, чем сторона треугольника, будут находиться от центра на расстоянии, меньшем $r/2$ (рис. 5).

Если считать, что произвольно проведенные хорды будут выходить из определенной точки на окружности, то искомая вероятность равна $^1/_3$ (рис. 6). Если мы будем считать, что слова «взятая произвольно» означают, что вероятность попадания середины хорды внутрь какой-либо части круга пропорциональна площади этой части, то получим, что искомая вероятность равна $^1/_4$. Действительно, так как серединой хорды может быть любая точка круга, а се-

редины хорд, которые больше стороны треугольника, заполняют круг радиуса $r/2$, то искомая вероятность будет $\pi\,(r/2)^2/\pi r^2 = {}^1/_4$ (рис. 7). При других трактовках «произвольного взятия» можно получить и другие вероятности.

Такая неопределенность ответа может быть объяснена следующим образом. Само слово «вероятность» предполагает некоторый определенный опыт. Во многих задачах этот опыт хотя и не оговаривается специально, но каков он, обычно ясно из содержания

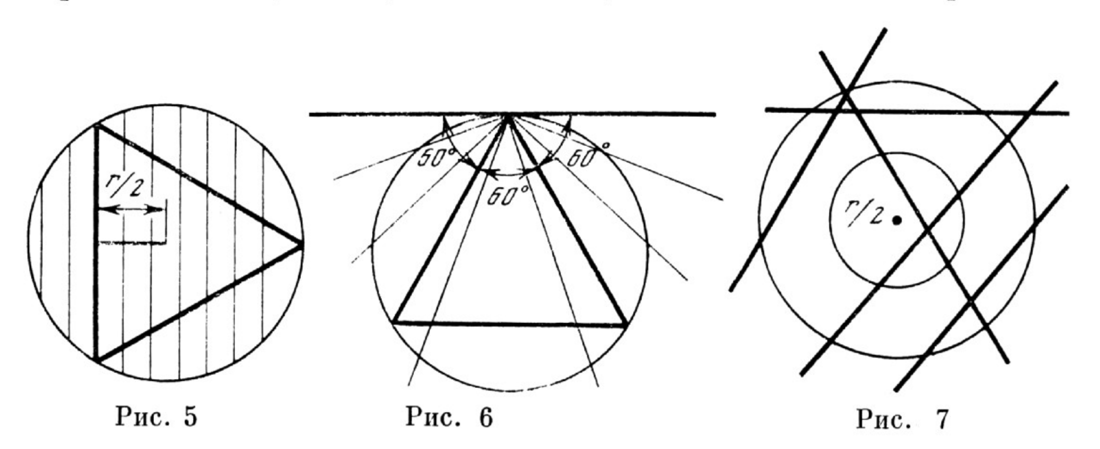


Рис. 5 Рис. 6 Рис. 7

задачи. В рассматриваемом случае слова «произвольно взятая хорда» без дальнейших разъяснений в постановке задачи фактически не дают никаких указаний о конкретном опыте.

Из этих трех решений, предложенных Бертраном, следует отдать предпочтение первому. К этому ответу приводят такие общие задачи.

При бросании круглого диска на плоскость, на которой начерчены прямые, вероятность того, что покрытая хорда будет больше стороны равностороннего треугольника, равна ${}^1/_2$. К этому же ответу мы придем, если будем рассматривать хорды, которые подчеркивают на диске Луны затмеваемые звезды, или хорды, описанные звездами в поле зрения телескопа.

Рассмотрим еще один парадокс Бертрана. На поверхности шара взяты наудачу две точки M и M', какова вероятность, что меньшая из дуг большого круга MM' будет меньше α?

От положения M эта вероятность не зависит. Но если M фиксировано, то точка M' должна находиться на поверхности шара от точки M не далее, чем круг, нанесенный на шаре (см. рис. 8). Пусть R — радиус шара. Тогда $MP = OM - OP = R\,(1 - \cos\alpha)$. Отношение поверхности, где может находиться точка M', к поверхности шара равно

$$\frac{MP}{2R} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Это и есть искомая вероятность. Если α мало́, то $p = \alpha^2/4$. Бертран [Bertrand, 1899, гл. I] дает и второе решение, приводящее совсем к другому результату.

Если даны две точки M и M', то тем самым определена и дуга большого круга, соединяющая их. Все дуги большого круга одинаковы, и мы не изменим вероятности, рассматривая только данную дугу. Вероятность, что две точки расположены так, что дуга, соединяющая их, меньше α, будет α/π. Пусть $\alpha = 1°$; в радианной мере $\alpha = \pi/180°$; $\alpha^2/4 = \pi^2/360°$, и вероятность равна $\alpha/\pi = {}^1/_{180}$, что примерно в 70 раз больше $\alpha^2/4$ — вероятности, подсчитанной раньше.

Бертран заключает отсюда, что данная задача неразрешима, а следовательно, первое решение (как и второе) неверно.

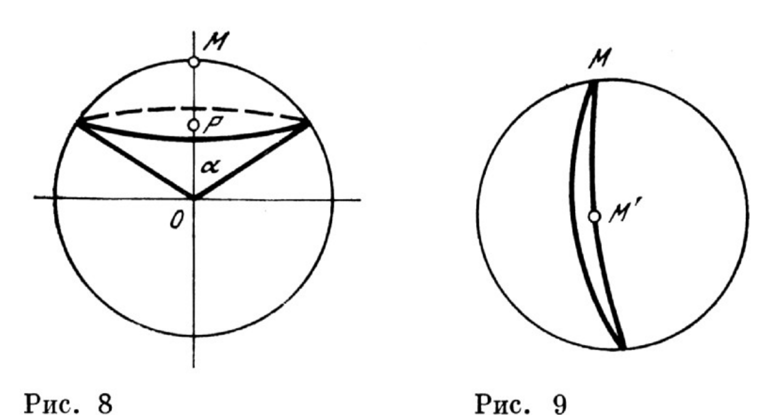


Рис. 8 Рис. 9

Однако, в данном случае первое решение правильное, а второе содержит ошибку. В этой задаче считается, что все равные доли поверхности шара эквивалентны по отношению нахождения на них точек M и M'. Ошибка во втором решении заключается в том, что считается, что вероятность нахождения M' на данной дуге большого круга пропорциональна длине дуги. Если дуга большого круга не имеет толщины, то вероятность нахождения точки на этом круге будет равна 0.

Чтобы избежать этого, необходимо вместо линий рассматривать тонкую полосу, стороны которой исходят из одной точки M (рис. 9).

Из рисунка видно, что вероятность попасть в эту полосу около точки M меньше, чем на расстояниях в 90° от нее.

Бертран выступал с критическими замечаниями по поводу различных вопросов теории вероятностей. Например, обсуждается вопрос: если некоторые звезды расположены очень близко на небесной сфере друг от друга, то следует ли из этого, что они действительно близки в пространстве?

Если изучать число звезд определенной величины, то можно вычислить вероятность расположения определенного числа звезд на небесной сфере внутри данной небольшой окружности. Если вычисленная вероятность очень мала, то можно предполагать, что эта группировка звезд имеет причину, т. е. что эти звезды действительно близки в пространстве. По этому поводу Бертран делает такое возражение: «Плеяды кажутся более близкими друг к другу,

чем следует. Это утверждение заслуживает внимания; но если бы мы захотели выразить выводы цифрами,— у нас не хватило бы данных. Каким путем можно точно определить это туманное понятие близости? Искать наименьший круг, в котором заключена данная группа? Наибольшее угловое расстояние? Сумму квадратов всех расстояний? Площадь сферического многоугольника, вершинами которого являются некоторые звезды и внутри которого заключаются другие? Все эти величины в группе Плеяд меньше, чем можно было ожидать. Которая из них будет мерилом вероятности? Если три звезды образуют равносторонний треугольник, следует

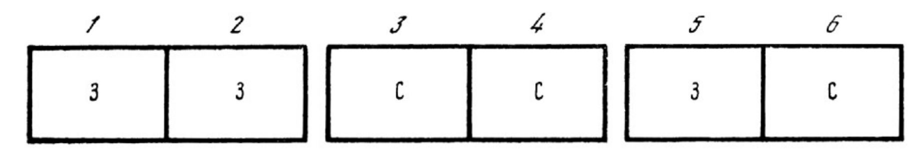


Рис. 10

ли считать, что это обстоятельство, конечно маловероятное a priori, указывает на существование некоторой причины?» [Bertrand, 1899, с. 170].

Относительно замечания Бертрана о равностороннем треугольнике скажем только, что любой другой треугольник имеет такую же малую вероятность.

Бертран (а затем и Пуанкаре) рассматривает следующий вопрос. Три одинаковых ящика имеют каждый по два отделения. Первый содержит в каждом отделении по золотой медали, второй — по серебряной, а третий — в одном отделении золотую, а в другом — серебряную. Взят один из ящиков. Какова вероятность того, что в его отделениях будут различные медали? Очевидно, что эта вероятность равна $^1/_3$. Поставим другой вопрос: какова вероятность, что, взяв ящик и вскрыв одно отделение, во втором отделении этого ящика обнаружим медаль другого металла, чем во вскрытом отделении?

Бертран отвечает на этот вопрос следующим образом. Пусть, например, во вскрытом отделении находится золотая медаль, тогда в другом отделении может быть или золотая, или серебряная, следовательно, искомая вероятность равна $^1/_2$. В этом решении содержится ошибка, так как Бертран не устанавливает равновозможности рассматриваемых случаев.

Правильное решение этой задачи становится ясным, если мы представим ящики схематически (рис. 10).

Если во вскрытом отделении будет золотая медаль, то мы попали на один из трех (1, 2, 5) равновозможных случаев, из которых только третий будет благоприятный для нас. Следовательно, искомая вероятность равна $^1/_3$. Аналогично рассуждаем, если во вскрытом ящике будет серебряная медаль.

Если же известно, какое отделение вскрыто — левое или правое, то искомая вероятность будет $^1/_2$.

Бертран не принимает теорию „среднего человека“ А. Кетле. Действительно, рассуждает Бертран, может ли существовать человек, рост которого равнялся бы среднему росту, вес — среднему весу и т. д.? Возьмем, например, два шара, один из которых имеет радиус $r_1 = 1$, а другой $r_2 = 3$. Если они сделаны из одного материала и если первый весит 1 г, то второй будет весить 27 г. Тогда средний шар должен иметь $r = 2$ и вес $(27 + 1)/2 = 14$. Но если средний шар сделан из того же материала, то при $r = 2$ его вес должен быть 8, а не 14.

В своей книге [Bertrand, 1899] Бертран касается спора, который возник в связи с введением оспопрививания. Первоначально в среднем 1 человек из 200 умирал в результате прививки. Возникли колебания относительно целесообразности оспопрививания. «Даниил Бернулли, невозмутимый геометр, научно вычисляя среднюю жизнь, нашел, что она увеличилась на три года, и из этого сделал вывод о благодеятельности прививки» [Там же, с. XII]. Далее Бертран приводит возражение Даламбера против взглядов Д. Бернулли и поддерживает его возражения. Для того, чтобы подчеркнуть мысль Даламбера, он пишет: «Допустим, что можно оперативным путем увеличить среднюю продолжительность жизни уже не на 4, а на 40 лет при условии, что моментальная смерть угрожает четвертой части оперированных: пожертвовать четвертью жизней, чтобы удвоить остальные три четверти, выгода большая. Кто захочет ею воспользоваться? Какой врач согласится оперировать? Кто взялся бы, приглашая 4000 здоровых и сильных людей к операции, заказывать на следующий день 1000 гробов? Какой директор учебного заведения осмелился бы объявить 50 матерям, что, желая увеличить среднюю продолжительность жизни своих 200 учеников, он сыграл за них в эту выгодную игру и что их сыновья в числе проигравших. Самые благоразумные родители приняли бы риск 1 шанса против 200; никто, на основании каких бы то ни было вычислений, не подвергся бы риску 1 шанса против 4» [Там же].

В своих парадоксах Бертран из предпосылок, которые кажутся одинаково естественными, получает совершенно различные ответы в задачах о вероятностях. Это подчеркивало необходимость более глубокого понимания роли и природы вероятностных предпосылок. Своими парадоксами Бертран никоим образом не стремился подорвать авторитет теории вероятностей. Он лишь хотел подчеркнуть нечеткость и неточность некоторых понятий теории вероятностей, в первую очередь самого понятия вероятности, способствуя тем самым их уточнению.

Необходимость установления строгой логической базы теории вероятностей исходила из разных областей.

Глава 5

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Предпосылки аксиоматического введения вероятности

Развитие теории вероятностей в начале XX в. привело к необходимости пересмотра и уточнения ее логических основ. Этого требовало развитие статистической физики; этого требовало развитие самой теории вероятностей, в которой остро стала ощущаться неудовлетворенность классического обоснования лапласовского типа; этого требовало и развитие других наук, в которых широко применялись вероятностные понятия.

Для того чтобы установить логическую стройность и последовательность выводов, необходимо выделить первоначальные понятия, установить правила вывода, установить непротиворечивость всех полученных результатов.

Ответ на эти вопросы дает аксиоматический метод. Аксиоматический метод позволяет обозреть всю совокупность объектов, изучаемых данной математической теорией. Этот метод заключается в том, что в основу теории кладутся некоторые положения, которые называются аксиомами, и из них выводятся все остальные положения этой теории, при этом отчетливо сформулированы и все правила вывода.

Исторически аксиоматический метод возник впервые в геометрии. Для лучшего уяснения сущности аксиоматического обоснования теории вероятностей мы кратко остановимся на характеристике аксиоматического метода.

Те положения теории, из которых можно вывести все остальные, называются аксиомами; те положения, которые выводятся,— теоремами. Какие же положения принимаются за аксиомы? Иногда об аксиомах говорят как об очевидных истинах, не нуждающихся в доказательстве в силу своей очевидности. Но требование очевидности есть субъективное требование, кроме того, среди доказанных на основании аксиом теорем встречаются утверждения, о которых говорить, что они менее очевидны, чем аксиомы, нельзя.

Все аксиомы имеют опытное происхождение. Аксиомы — это те положения, которые не вызывают сомнений ввиду их многократной (часто многовековой) проверки человечеством на практике, т. е. аксиомы — это не истины, которые не нуждаются в доказательстве, а истины, доказательство которых многократно осуществ-

лено в ходе их практического применения и которые поэтому уже не требуют специального формально-логического доказательства. По поводу происхождения аксиом В. И. Ленин писал: «Практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, *дабы* эти фигуры *могли* получить значение *аксиом*» [Ленин, 1947, с. 164].

Лишены смысла заявления о свободе выбора системы аксиом, на которых строится та или иная математическая теория. Приведем одно из ярких заявлений такого рода: «В точности тем же способом, каким романист изобретает характеры, диалоги и положения, для которых он является одновременно и автором и хозяином, математик сочиняет постулаты, на которых он основывает свои математические системы» [Bell, 1945, с. 330]. Только практика служит критерием истинности и критерием для выбора аксиом.

Впервые аксиоматическое построение было осуществлено с известным приближением в геометрии еще в Древней Греции. Наиболее ярким памятником такого построения явились «Начала» Евклида (III в. до н. э). Значение аксиоматического метода возросло особенно после того, как Н. И. Лобачевский показал возможность построения геометрии на аксиомах, отличных от евклидовых. После этого появилось много математических теорий, которые строились на основе аксиоматического метода. К началу XX в. аксиоматический метод стал проникать во многие области математики. Был произведен глубокий анализ системы аксиом геометрии (Д. Гильберт, Д. Пеано, В. Ф. Каган), началось серьезное исследование аксиоматики арифметики (Д. Пеано, Д. Гильберт) и др.

Аксиоматический метод — это не только метод логического обоснования различных разделов математики, он является также методом отыскания новых фактов. Установление аксиом служит толчком к дальнейшему развитию теории.

При таком построении любого раздела математики, когда из системы аксиом можно логически вывести все предложения (теоремы) данного раздела, возникает опасение, что при достаточно далеком продолжении мы можем прийти к противоречию, т. е. доказать какую-нибудь теорему и одновременно ее отрицание. Система аксиом называется непротиворечивой, если этого не случится.

Для непротиворечивой системы аксиом существуют такие математические объекты, отношения между которыми выражаются этой системой аксиом. Например, мы из геометрии Евклида можем найти математические объекты, которые удовлетворяют аксиомам Лобачевского. Этим самым мы устанавливаем, что если в геометрии Лобачевского будет обнаружено противоречие, то оно неизбежно обнаружится в геометрии Евклида. Таким образом доказывается, что геометрия Лобачевского так же непротиворечива, как и Евклида. В конечном счете непротиворечивость любой системы аксиом можно свести к непротиворечивости арифметики. Всякое противоречие в такой системе означало бы противоречие

в арифметике. Таким образом, доказательство непротиворечивости является относительным доказательством: доказывается только то, что одна система так же непротиворечива, как другая. Для доказательства непротиворечивости арифметики необходимо обратиться к опыту. А так как арифметика играет роль фундамента всей математики, то, следовательно, обоснование математики вообще базируется на обращении к опыту.

Арифметика непротиворечива потому, что все ее законы являются отражением количественных отношений между предметами реального мира и эти законы миллиарды раз проверены практикой всего человечества. Таким образом, требование непротиворечивости аксиом в конечном счете является требованием соответствия аксиом реальной действительности.

Даже те математики, которые считают, что они свободны в выборе аксиом для той или иной теории, всегда выдвигают требование непротиворечивости этих аксиом.

Кроме требования непротиворечивости, к системе аксиом предъявляют еще требование независимости. Стремятся к тому, чтобы система аксиом была минимальной, чтобы в числе аксиом не было лишних, которые являются логическим следствием из других, т. е. чтобы среди системы аксиом не встречались теоремы.

При независимой системе аксиом логически выводится максимальное число положений; это наилучшим образом выявляет логические связи и освещает логическую структуру соответствующего математического раздела.

Важной характеристикой системы аксиом является ее полнота; из такой системы можно вывести все предложения рассматриваемого раздела. Или, говоря иначе, система аксиом называется полной, если она определяет соответствующую систему объектов.

Понятия непротиворечивости, независимости и полноты являются основными характеристиками системы аксиом.

После работ Н. И. Лобачевского стало ясно, что одной и той же системе аксиом могут удовлетворять различные математические объекты, т. е. могут быть различные интерпретации системы аксиом.

Мы можем рассматривать систему аксиом как неявное определение объектов, которые изучаются той или иной математической дисциплиной. Иногда у нас нет другого пути определить объект изучения. Например, аксиомы теории групп являются просто определением понятия группы.

Если основные положения теории (аксиомы) заданы формально, то доказанные с их помощью теоремы выражают свойства сразу между всеми одноименными объектами в различных интерпретациях, т. е. доказывается сразу целая система теорем. Такая формализация выражает широкую общность, а потому и значительно бо́льшую силу математических методов. Это явилось одной из причин значительного распространения аксиоматического метода. Аксиоматический метод — это не только метод логического обо-

снования различных разделов математики он, является, кроме того, методом отыскания новых фактов.

Установление принципов теории есть итог развития, но это совсем не значит, что оно является его концом. Найденные принципы служат новому движению познания вперед.

Так и установление аксиом для того или иного раздела математики не является подведением окончательного итога ее развития. Установление аксиом служит наряду с подведением итога толчком к дальнейшему развитию теории.

В начале XX в. во всех трудах по теории вероятностей излагалось классическое обоснование вероятности, идущее от Лапласа, хотя с развитием науки все отчетливее вырисовывалось несоответствие этого обоснования и уровня науки. Оно оказалось неприменимым к большинству проблем физики, статистики, биологии и техники. Во всех этих задачах не удавалось указать равновозможные случаи, без которых нельзя говорить, по Лапласу, о вероятности. Становилось все отчетливее видно, что теория вероятностей нуждается в новом логическом обосновании — в обосновании с помощью аксиоматического метода.

2. Роль С. Н. Бернштейна в аксиоматизации вероятности

Пересмотр логических основ теории вероятностей явился началом нового, наиболее плодотворного этапа ее развития. Первые работы в этом направлении принадлежат С. Н. Бернштейну. В 1917 г. он опубликовал работу «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей» [Бернштейн, 1917]. Разработкой аксиоматизации Бернштейн занимался и в дальнейшем.

В книге «Математика в СССР за тридцать лет» указывается, что с работами Бернштейна связывается начало нового этапа в развитии теории вероятностей. «В России и в СССР четвертый период развития теории вероятностей открывается работами С. Н. Бернштейна» [Гнеденко, Колмогоров, 1948, с. 701].

В 1927 г. вышло первое издание книги С. Н. Бернштейна «Теория вероятностей», последнее (четвертое) издание — в 1946 г. [Бернштейн, 1946]. Это одна из лучших книг по теории вероятностей, по ней в течение многих лет учились не только математики, но и физики и многие представители других специальностей.

В книге «Теория вероятностей» С. Н. Бернштейн подробно излагает свою аксиоматику теории вероятностей. Он обосновывает и объясняет аксиомы, делая много общих выводов и замечаний. Он считает, что основная схема, по которой происходят наши выводы в естествознании, состоит в том, «что на основании предшествующего опыта утверждается достоверность наступления события известного класса A, если осуществлен некоторый определенный комплекс условий α, каковы бы ни были прочие обстоятельства. Поскольку в данном конкретном опыте соблюдены условия α, на-

ступление факта A неизбежно» [Там же, с. 7]. Но оказывается, замечает Бернштейн, наступление факта A не является абсолютной достоверностью. Мы не можем предвидеть ход реальных явлений с непоколебимой уверенностью. Закон, который связывает α с A, только в том случае имеет практический смысл, когда комплекс условий α не слишком громоздок и поддается наблюдению. Если это условие не выполняется, то факт A называется случайным. Тогда мы стремимся вместо α ввести более простой комплекс условий β, при наличии которого наступление A приобретает определенную вероятность.

«Основное допущение теории вероятностей (постулат существования математической вероятности) состоит в том, что существуют такие комплексы условий β, которые (теоретически по крайней мере) могут быть реализованы неограниченное число раз и при наличии которых в данном опыте наступление факта A имеет определенную вероятность, выражающуюся числом» [Там же, с. 8].

Если B также обладает вероятностью, то имеет место одно из трех соотношений:

$$\text{вер. } A = \text{вер. } B; \ \text{вер. } A > \text{вер. } B; \ \text{вер. } A < \text{вер. } B.$$

«Опыт имеет решающий голос в вопросе о том, возможно ли при осуществлении данного комплекса условий β и полной неопределенности прочих обстоятельств приписать факту A определенную вероятность» [Там же].

Бернштейн вводит три аксиомы: 1) аксиома сравнения результатов; 2) аксиома о несовместимых событиях; 3) аксиома совмещения событий.

Первые две аксиомы имеют в виду неизменность комплекса β. Третья аксиома связывает вероятность A при одних условиях α с вероятностью того же факта при другом комплексе условий β.

Прежде чем перейти к формулировкам аксиом, введем некоторые необходимые понятия.

Если наступление a означает также и наступление A, то a называется частным случаем события A. Если событие A возможно и без наступления его частного случая A_1, то A_1 называется частным случаем A в узком смысле слова (видом события A). В противном случае мы считаем, что A_1 есть частный случай A в широком смысле слова.

Теперь сформулируем первую аксиому.

Аксиома сравнения вероятностей. Если a есть вид (частный случай в узком смысле слова) события A, то вер. $a <$ вер. A; обратно, если между вероятностями фактов a_1 и A существует неравенство вер. $a_1 <$ вер. A, то оно означает, что вер. $a_1 =$ вер. a, где a есть некоторый вид события A.

Из первой части аксиомы вытекает два очевидных следствия:

1) вероятность достоверного факта больше вероятности только возможного факта;

2) вероятность возможного факта больше, чем невозможного.

Это означает, что все достоверные факты имеют одну и ту же наибольшую вероятность и что все невозможные факты имеют одну и ту же наименьшую вероятность.

Что касается второй части аксиомы,то здесь могут возникнуть большие трудности при указании события a. Однако считается, что принципиально всегда возможно указать такое событие,так как только после этого выражение вер. $A >$ вер. a_1 имеет смысл.

Вторая аксиома.

Аксиома о несовместимых событиях. Если известно, что события A и A_1 несовместимы и, с другой стороны, события B и B_1 также несовместимы, причем вер. A = вер. B и вер. A_1 = вер.B_1, то вероятность факта, заключающегося в наступлении события A или события A_1, равна вероятности факта C_1, заключающегося в наступлении B или B_1, т. е. вер. (A или A_1) = = вер.(B или B_1).

Вторая аксиома означает, что вероятность наступления одного из двух несовместимых событий определяется вероятностями каждого из них в отдельности, т. е. является их функцией и не зависит от природы самих событий.

Эта аксиома легко распространяется на любое число несовместимых событий.

Как следствие из двух аксиом можно получить следующий вывод: «Если событию x благоприятствует m случаев из общего числа всех n единственно возможных, несовместимых и равновероятных случаев, то вероятность события x зависит только от чисел m и n (а не от природы рассматриваемого опыта), т. е. вер. $x = F(m, n)$, где $F(m, n)$ есть некоторая определенная функция» [Там же, с. 13].

Любая ли функция $F(m, n)$ удовлетворяет первым двум аксиомам? Оказывается, этим аксиомам удовлетворяет только функция вида $F(m/n)$, причем это возрастающая функция дроби m/n. Это является необходимым и достаточным условием для соблюдения аксиом. Любую такую функцию $F(m/n)$ можно принять за вероятность x, лишь бы эта функция была зафиксирована на протяжении всего рассмотрения данной области объектов. Общепринято считать $F(m/n) = m/n$. Это и есть вероятность события x в высказанных условиях. «Однако в согласии с основными аксиомами мы с одинаковым правом могли бы также назвать вероятностью m^2/n^2, $m/(n-m)$ и т. д. Очевидно, что принятие того или иного словесного определения также мало повлияло бы на выводы теории вероятностей, как изменение единицы меры на выводы геометрии или механики. Изменилась бы только форма теорем, а не их содержание, мы получили бы не новую теорию вероятностей, а изложение той же теории в новой терминологии. Таким образом, соглашение, которое мы вводим здесь, носит чисто технический характер, в противоположность основным аксиомам. ... характеризующим сущность понятия вероятности: нарушение этих основных

аксиом, напротив, совершенно изменило бы содержание теории вероятностей» [Бернштейн, 1946, с. 229—230].

Это рассуждение Бернштейн иллюстрирует следующим примером. Если за вероятность принять выражение $m/(n-m)$, то теорема сложения вероятностей примет другой вид, P (A или B) будет равна не p_1+p_2, а $(p_1+p_2+2p_1p_2)/(1-p_1p_2)$, где p_1 — вероятность события A, p_2 — вероятность события B.

Аксиома о совмещении событий связывает значения вероятностей при одном комплексе условий со значениями, соответствующими другому комплексу условий.

Аксиома совмещения событий. Если α есть частный случай факта A, то вероятность α при данных условиях зависит только от вероятности факта A при тех же условиях и от вероятности, которую приобретает α в случае осуществления факта A.

Это означает, что если α_1 есть частный случай факта A_1, то вер. α = вер. α_1, если вер. A = вер. A_1 при данных условиях и если вероятность, которую получает α после осуществления A, равна вероятности, которую получает α_1 в случае осуществления A_1.

Если α есть совмещение фактов A и B, то при осуществлении факта A наступление α равнозначно наступлению факта B.

Аксиому совмещения событий можно сформулировать еще так. Вероятность совмещения A и B (при данных условиях) зависит исключительно от вероятности A (при тех же условиях) и от вероятности, которую приобретает факт B после осуществления A.

Для независимых событий эта аксиома означает: Если события A и B независимы, то вероятность совмещения A и B зависит только от первоначальных вероятностей этих фактов.

Аксиому совмещения событий можно записать так:

$$(A, B) = \Phi\,[(A), (B)_A] = \Phi\,[(B), (A)_B],$$

где (A) — вероятность A, $(A)_B$ — вероятность A после осуществления B, (A, B) — вероятность совмещения A и B, Φ — некоторая раз навсегда определенная функция (вид этой функции устанавливается теоремой умножения: $(A, B) = (A)\,(B)_A$ и зависит от вида функции F).

На основе этих аксиом Бернштейн строит все здание теории вероятностей. «С. Н. Бернштейну принадлежит первая систематически развитая аксиоматика теории вероятностей, построенная на понятии качественного сравнения событий по их большей или меньшей вероятности. Само численное выражение вероятности появляется в этой концепции уже в виде производного понятия» [Колмогоров, 1956, с. 60]. Эта концепция С. Н. Бернштейна позже разрабатывалась В. И. Гливенко и американским математиком Купманом.

«Ранние работы Бернштейна посвящены аксиоматике теории вероятностей, они были первыми в мире исследованиями в этой области» [Линник, 1970, с. 245].

Давая оценку аксиоматике С. Н. Бернштейна и говоря о ее месте в современном изложении теории вероятностей, Ю. В. Линник пишет: «В современной формулировке предложенная Бернштейном аксиоматика описывается в терминах нормированной булевой алгебры предложений» [Там же, с. 245].

В своих многочисленных работах по применению теории вероятностей к проблемам естествознания Бернштейн придерживался взглядов, изложенных им на I Всероссийском съезде математиков в 1927 г. в Москве.

«Чисто математическая теория вероятностей может не интересоваться тем, имеет ли коэффициент называемый математической вероятностью, какое-нибудь практическое значение, субъективное или объективное. Единственное требование, которое должно быть соблюдено,— это отсутствие противоречий, а именно: различные способы вычисления указанного коэффициента при данных условиях и соблюдении принятых аксиом должны приводить к одному и тому же значению.

Кроме того, если мы хотим, чтобы выводы теории вероятностей были не простой игрой ума, а допускали эмпирическую проверку, то необходимо рассматривать только такие совокупности предложений или суждений, относительно которых возможно фактически установить, истинны они или ложны. Познавательный процесс, необратимый по существу, в этом именно и заключается, что те или иные из признаваемых нами возможными предложений становятся истинными, т. е. осуществляются, и тогда отрицания их в то же время становятся ложными или невозможными.

Таким образом, построение теории вероятностей как единого познавательного метода требует, чтобы истинность предложения однозначно, без всяких исключений характеризовалась определенным максимальным значением математической вероятности, которое принимается равным единице, а ложность предложения должна быть адекватна наименьшей вероятности, приравниваемой к нулю [Бернштейн, 1933, с. 6].

Но и после аксиоматики Бернштейна в обосновании теории вероятности полной ясности не наступило. В этом отношении любопытна точка зрения Романова [Романов, 1971], который попытался обосновать теорию вероятностей с несколько неожиданных позиций. В своих воспоминаниях, написанных в 1932 г., он говорит: «Теория вероятностей покоится на неясном шатком фундаменте. Понятия «здравый смысл» (Лаплас) и «интуиция» (академик С. Н. Бернштейн), которые кладутся в ее основу, не могут считаться строго научными ввиду их неопределенности и расплывчатости» [Там же, с. 231]. Его не удовлетворили ни лекции А. К. Сушкевича в Воронежском университете в 1924 г., которые он слушал, ни курс Лахтина [Лахтин, 1924], в котором говорится: «Сущность понятия «вероятности» мы не можем определить — так же как в физике нельзя определить сущность материи, силы тепла, электричества, магнетизма и т. д.» [Там же, с. 3]. Романов по

поводу этого высказывания пишет: «Это . . . явно выраженный агностицизм. Здесь мысль в бессилии складывала крылья» [Романов, 1971, с. 221].

Романов высказывает сомнения, которые у него возникли при чтении работы Бернштейна [Там же]. «В книге академика С. Н. Бернштейна . . . меня поразила сравнительная сложность аксиом, положенная им в основу теории вероятностей. Казалось, что для того, чтобы обосновать понятие, ясность, самоочевидность и простота которого бросается в глаза, возводится сложный и громоздкий фундамент, правда, утонченной, филигранной отделки, но все же производящий впечатление чего-то ненужного, искусственного. Формула вероятности, думал я, должна покоиться на чем-то весьма простом и естественном, таком же простом, как она сама» [Там же, с. 221—222]. Под формулой вероятности Романов понимает классическое определение вероятности ($p = m / n$). Для обоснования понятия вероятности он предлагает привлечь психологические и физиологические соображения:

«Можно представить себе такой опыт, при котором из числа воздействия условным агентом подкрепляются подкармливанием не все, а лишь некоторые (например, половина всех воздействий). Тогда... мы могли бы сказать, что получение еды при каждом новом отдельном воздействии условным раздражением на организм будет представляться для животного событием не достоверным и не невозможным, а лишь более или менее вероятным. Интересно выяснить, какая по величине будет в этом случае слюнная реакция у собаки. Эти опыты могут пролить свет на трудно определимое понятие вероятности» [Там же, с. 231].

Выслушав эти соображения, Н. Н. Лузин (по словам Романова) сказал следующее: «До сих пор формула вероятности бралась математиком как некоторая принудительная данность. Этот прием, о котором мы только что слыхали, может оказаться чрезвычайно плодотворным. Ибо формула вероятности должна покоиться не на сложных искусственных аксиомах, а на чем-то простом и естественном, таком же простом и естественном, как она сама. Это назрело» [Там же, с. 231].

По разным причинам Романов, кроме постановки проблемы, фактически больше почти не занимался этим вопросом.

Аксиоматика Бернштейна исторически была первой основательно разработанной аксиоматикой вероятности, но она не оказала еще решающего влияния на дальнейшее развитие теории вероятностей, на уяснение понятия вероятности. И после работы Бернштейна в вопросе о вероятности не было ясности, оставались неопределенными области ее применения.

Так, например, Лахтин в своей книге, вышедшей в 1924 г., которая была пособием для высших учебных заведений [Лахтин, 1924], рассматривает, следуя Д. Бернулли, нравственное ожидание. Тот же Лахтин выступал вообще против аксиоматики теории вероятностей. Он заявляет, «что эта теория не нуждается ни в ка-

ких... постулатах или аксиомах, кроме тех, которые лежат в основе всей чистой математики вообще» [Там же, с. 330].

Примеров, которые подчеркивают неясность и путаницу в вопросе о вероятности, можно привести множество.

Вопрос обоснования понятия вероятности, а вместе с тем и теории вероятностей оставался одним из актуальнейших вопросов науки.

3. Частотная школа Р. Мизеса

В основе любой аксиоматической системы теории вероятностей лежит определение понятия вероятности. На недостатки классического определения вероятности указывали давно. Были видны и недостатки субъективной трактовки вероятности, идущей от Лапласа. Критику этих недостатков встречали благожелательно. Наиболее широкое распространение получили работы в этом направлении немецкого ученого Р. Мизеса (1883—1953), который из гитлеровской Германии эмигрировал в США, где он возглавил Институт прикладной математики. Мизес является основателем так называемой частотной концепции в теории вероятностей. Мизес последовательно и настойчиво указывал на коренные недостатки классических установок [Мизес, 1930; Mises, 1931].

Рассмотрим один из примеров, приводящий к нелепости в классической теории вероятностей, который придумал Мизес. В классической теории вероятностей несовместными событиями называются события, которые не могут произойти оба вместе. Для несовместных событий справедлива теорема сложения вероятностей, т. е. вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей. Решим простую задачу. Пусть теннисист A может поехать на турнир или в Москву, или в Лондон, причем оба турнира происходят одновременно. Вероятность того, что A займет первое место в Москве, если он туда поедет, равна 0,9, а в Лондоне — 0,6. Чему равна вероятность того, что A займет где-нибудь (или в Москве, или в Лондоне) первое место? Согласно классической теории, события «выигрыш турнира в Москве» и «выигрыш турнира в Лондоне» несовместные, и к ним можно применить теорему сложения вероятностей. Следовательно, искомая вероятность будет равна $0{,}9 + 0{,}6 = 1{,}5$.

Мизес и его школа отчетливо выразили мысль, что понятие вероятности имеет смысл только при наличии массовых явлений. Одно из главных противоречий между частотной школой и основным направлением развития теории вероятностей состоит в ответе на вопрос: является ли теория вероятностей математической дисциплиной или же это научная дисциплина, которая только широко использует математические методы?

Мизес считал, что теория вероятностей не является математической дисциплиной. Для доказательства этого утверждения он приводит рассуждение о том, что с каждой вероятностной за-

дачей обязательно связан некоторый реальный процесс, поэтому теория вероятностей есть наука о явлениях реального мира, а математика, по Мизесу, таковой не является [1].

Все современное развитие теории вероятностей неоспоримо устанавливает принадлежность ее к математическим дисциплинам.

Ряд советских исследователей, категорически отвергая философские установки Мизеса, приняли в свое время положение о том, что теория вероятностей не является математической дисциплиной.

Основным понятием в частотной теории Мизеса является понятие коллектива. Под коллективом понимается бесконечная последовательность k одинаковых наблюдений, каждое из которых определяет некоторую точку, принадлежащую заданному пространству R конечного числа измерений. Говорить о вероятности, по Мизесу, можно только тогда, когда существует та определенная совокупность событий, которую он назвал коллективом. «Условимся называть коллективом совокупность событий или явлений, которые отличаются друг от друга каким-нибудь доступным наблюдению признаком (числом, окраской и т. п.). Сперва должен быть налицо коллектив, тогда только можно говорить о вероятностях» [Мизес, 1930, с. 16].

Коллектив, по Мизесу, должен удовлетворять следующим двум требованиям: 1) относительные частоты появления определенного события в последовательности независимых испытаний имеют определенные предельные значения; 2) предельные значения, о которых говорится в первом требовании, остаются неизменными, если из всей последовательности выбрать любую подпоследовательность.

Это и есть аксиомы Мизеса, которые мы сформулируем по-другому.

Первая аксиома. Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = P(S)$, где m — число случаев при первых n наблюдениях, когда определяемая наблюдениями точка принадлежит подмножеству S. Этот предел существует для любого простого подмножества $S \subset R$, его мы и называем вероятностью.

Вторая аксиома Мизеса эквивалентна следующему утверждению. Требуется, чтобы существовал и имел то же значение $P(S)$ аналогичный предел для любой подпоследовательности k', образованной из элементов k по такому правилу, что всегда можно решить, входит ли n-е наблюдение из k в k' или нет, не зная результата этого наблюдения.

Последняя часть второй аксиомы не имеет точного математического смысла. «Попытки сформулировать вторую аксиому более строго не дали, по-видимому, до сих пор удовлетворительных и легко применимых результатов... я думаю, что эти трудности

---

[1] Наиболее полно Мизес изложил свои взгляды в работе [Mises, 1931].

должны быть признаны достаточно серьезными, чтобы оправдать, по крайней мере в настоящее время, выбор существенно иной системы аксиом» [Крамер, 1947, с. 12—13].

Основные положения Мизеса можно сформулировать и по-другому.

Мизес определяет понятие вероятности через понятие коллектива. По Мизесу, коллектив — это бесконечная последовательность исходов $\xi_1 \xi_2 \ldots, \xi_n \ldots$, удовлетворяющая следующим двум требованиям: 1. Пусть A — некоторое подмножество пространства значений ξ_n, тогда A называется событием. Пусть n_A — число появлений события A в n испытаниях; $\lim \frac{n_A}{n} = P(A)$ существует и называется вероятностью события A по отношению к данному коллективу.

2. Иррегулярность. Требование иррегулярности можно сформулировать как отсутствие закономерности в последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ или как невозможность точного предсказания следующих за известными компонент коллектива.

Исходя из того, что теория вероятностей не является математической дисциплиной, Мизес рассматривал свои аксиомы только как свойства коллектива и не придавал им значения аксиом математической теории.

«Мизес никогда и нигде не идет на полную формализацию своей теории, т. е. на придание ей чисто аксиоматической формы» [Хинчин, 1961, № 2, с. 86].

Сформулировав свои две аксиомы, Мизес заканчивает построение основ теории вероятностей и считает, что можно приступить к решению конкретных задач и к установлению общих закономерностей.

«Современная математическая дисциплина требует от своих оснований большего, нежели простая идеализация реального предмета. Она требует полной формализации, или, что то же, аксиоматизации своей области. Такая формализация должна состоять в установлении некоторой группы основных исходных положений, так называемых аксиом, точно описывающих все соотношения, имеющие место между основными понятиями данной дисциплины, причем как все эти понятия, так и эти соотношения считаются определенными именно этим списком аксиом. Все дальнейшие понятия, в которых нуждается теория, должны последовательно определяться формальным образом через эти основные понятия, все дальнейшие предложения (теоремы) должны быть формально доказуемы, исходя из этих аксиом» [Хинчин, 1961].

Как известно, на основании теоремы Я. Бернулли можно утверждать, что частота события в длинной серии испытаний будет стремиться к вероятности, отклоняясь от нее лишь незначительно. Однако это утверждение носит вероятностный характер, хотя вероятность его стремится к единице.

Приняв за основу тот факт, что вероятность и частота — связанные между собой величины, Мизес определяет вероятность как предельное значение частоты: «Обосновано предположение, что относительная частота появления каждого единичного наблюдаемого признака стремится к определенному предельному значению. Это предельное значение мы называем вероятностью» [Там же, с. 20]. Но на самом деле никакого обоснованного предположения у нас нет. Мы никогда не можем знать, имеет ли данная частота предел или нет, хотя бы уже потому, что для этого пришлось бы произвести бесконечное число опытов. У нас никогда нет гарантии, что стремление частоты к пределу начнет проявляться, предположим, только после миллионного испытания. Это определение несостоятельно математически, так как мы не можем указать функциональной зависимости между количеством испытаний n и частотой появления события m/n, где m — количество появлений события, а не указав такой зависимости, мы не можем вычислить предел $\lim_{n\to\infty}(m/n)$, который принят за вероятность.

Согласно Мизесу, события до опыта не имеют вероятности, она не является объективным свойством явления. Вероятность у событий появляется только в связи с проведением опыта. Таким образом, по Мизесу, мы с помощью опыта не выясняем существующее объективное свойство — вероятность, а приписываем это свойство (вероятность) явлениям. Мизес считает, что никакого дальнейшего обоснования понятия вероятности не требуется, и вероятность у него теряет свое содержание объективной числовой характеристики реальных явлений.

Относительно определения вероятности Мизесом шведский математик Г. Крамер пишет: «Предлагаемое определение вероятности приводит к смешению эмпирических и теоретических элементов, а современные аксиоматические теории обычно избегают этого смешения. Указанное определение вероятности можно сравнить, например, с определением геометрической точки как предела пятен мела неограниченно убывающих размеров, а подобного определения современная аксиоматическая геометрия не вводит» [Крамер, 1948, с. 72].

Хинчин [Хинчин, 1961] говорит о том, что понятие коллектива Мизеса не может служить из-за своих недостатков в качестве основы для аксиоматизации теории вероятностей.

А. Н. Колмогоров относительно установок Мизеса пишет: «Допущение о вероятном характере испытаний, т. е. о тенденции частот группироваться вокруг постоянного значения, само по себе бывает верно (как и допущение о «случайности» какого-либо явления) лишь при сохранении некоторых условий, которые не могут сохраняться неограниченно долго и с неограниченной точностью. Поэтому точный переход к пределу $\mu/n \to p$ не может иметь реального значения. Формулировка принципа устойчивости

частот при обращении к такому предельному переходу требует определения допустимых способов отыскания бесконечных последовательностей испытаний, которое тоже может быть лишь математической фикцией. Все это нагромождение понятий могло бы еще подлежать серьезному рассмотрению, если бы в результате получилось построение теории столь своеобразной, что иными путями до ее строгого обоснования нельзя было бы дойти» [Колмогоров, 1936, с. 274—275].

Далее Колмогоров говорит, что обоснование математической теории вероятностей может быть достигнуто более строгим и логически простым путем.

А. Я. Хинчин по поводу двух аксиом Мизеса пишет: «Возможность полной формализации частотной теории при сохранении обоих этих требований представляется по меньшей мере сомнительной, ибо по отношению к тем представлениям, которые современная математика связывает с понятием иррегулярной последовательности, требование существования пределов оказывается лишенным всякого содержания» [Хинчин 1961, № 2, с. 86].

Несмотря на эти недостатки, взгляды Мизеса широко пропагандировались и имели довольно большое распространение. Например, хотя от издательства при издании книги Мизеса на русском языке [Мизес, 1930] и была приписка, что «в теории познания Мизес стоит на точке зрения Маха. Махистская точка зрения проскальзывает у него также в трактовке отдельных проблем» [Там же, с. VI], редакция эту книгу представляла так: «Точка зрения Мизеса является наиболее приемлемой... Широким кругам советских читателей она дает исключительно много... Замена устаревших и грубо неверных формулировок новыми, научно действенными и предметно оправданными — вот основная заслуга Мизеса перед наукой» [Там же, с. VI—VII].

Среди математиков концепция Мизеса из-за указанных недостатков никогда не пользовалась большой популярностью.

«Если среди наших математиков это учение, насколько нам известно, сторонников не имеет (главным образом по причине своих чисто математических пороков), среди физиков оно... до сих пор пользуется значительным успехом» [Хинчин, 1952, с. 528]. Это писалось еще в 1952 г.— настолько распространены были, с одной стороны, взгляды Мизеса, и, с другой стороны, насколько недостаточно велась критика этих взглядов. На сегодняшний день картина изменилась, частотная концепция Мизеса сейчас не удовлетворяет и большинство физиков. Но несмотря на это, ряд ученых разделяют взгляды Мизеса. Так, Гейрингер, под редакцией которого вышла книга Мизеса [Mises, 1964], отвергает в основном критику его установок.

Известен ряд попыток полной формализации частотной теории, которые исходят из несколько измененных предпосылок. Например, Камке предлагал заменить бесконечные коллективы конечными и отказаться от требования иррегулярности. Дерге, Торнье,

Копленд и другие требуют частичного отказа от иррегулярности, т. е. они требуют сохранения одного и того же значения предела не для любого выбора последовательности, а только для некоторой ограниченной совокупности таких выборов. Торнье запрещает пользоваться в теории вероятностей схемами, которые не укладываются в частотную интерпретацию. Для этого он построил громоздкий формальный аппарат и вынужден был отказаться от постановки и решения ряда элементарных задач теории вероятностей.

Мизес ко всем этим изменениям относился отрицательно. Он считал, что требование иррегулярности является основным в его теории. Конечно, эти попытки могут привести к формализации теории вероятностей. Но любая частотная формализация оказывается очень громоздкой. Это объясняется тем, что она еще недостаточно формальна и несет на себе конкретное содержание. Чем аксиоматическая система абстрактнее, тем она проще, чем она содержательнее, тем она более сложна, и тем труднее с ее помощью делать выводы в данной теории. Это оказалось существенным недостатком и для всех частотных теорий. «Теория Мизеса — неэффективная теория» [Баранкин, 1956].

Мизес отсутствие аксиоматики не считал недостатком теории вероятностей. После появления теоремы Гёделя о неполноте многие математики перестали считать большим достоинством наличие аксиоматики у математической дисциплины.

Уже появление первых аксиоматизаций теории вероятностей указывает на недостатки определения вероятности, связанные с ее физической наглядностью. Такие определения вероятности соответствовали бы определению, например, прямой линии как длинной материальной ленты, поперечный размер которой уменьшается каждый раз вдвое, и этот процесс идет бесконечно долго.

К такому типу определений вероятности и относится определение Мизеса $\left(p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}\right)$, которое предполагает, что значения частот группируются вокруг постоянного значения при сохранении некоторых условий. Но эти условия не могут сохраняться неограниченно долго, поэтому переход к пределу (при сохранении этих условий) не имеет реального содержания. Так же нельзя определить, что же понимать под допустимыми способами бесконечных последовательностей испытаний, наличие которых требует определение Мизеса.

4. Субъективистские концепции вероятности

Кроме работ Мизеса, в XX в. было предложено много других обоснований теории вероятностей, ряд из них относится к субъективистским концепциям.

Впервые последовательно и развернуто концепцию субъективной вероятности развивал итальянский математик Финетти

[Finetti, 1937]. Сущность его точки зрения состоит в следующем.

Пусть E — некоторое событие, и пусть P будет та часть суммы S, которую данный индивидуум согласен заплатить или получить (заплатить, если $S > 0$, и получить, если $S < 0$) за участие в пари, при котором он получает или платит S в случае, если событие E происходит. Число P Финетти называет субъективной вероятностью события E данного индивидуума. Пусть $E_1, E_2 \dots, E_n$ — полная группа событий, т. е. все E_i не наступают одновременно и одно из E_i обязательно произойдет. Пусть P_i—соответствующие субъективные вероятности, назначенные данным индивидуумом. Если S_i — сумма, которую получает или платит индивидуум в случае, если событие E_i произойдет, то

$$G_h = S_h - \sum_{i=1}^{n} S_i p_i, \qquad \text{где } h = 1, \dots, n,$$

будет суммарным выигрышем или проигрышем в зависимости от знака при участии в n пари. Если P_i назначены так, что существуют ставки, при которых индивидуум, который назначает P_i, наверняка проиграет, то такое назначение P_i явно неразумно (несостоятельно, или, как принято говорить, некогерентно).

При требовании когерентности в назначении P_i необходимо $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$. Финетти доказывает, что при когерентных назначениях субъективных вероятностей они удовлетворяют теореме сложения и теореме умножения вероятностей.

Пусть $E_1, E_2, \dots, E_n$ — полная группа событий, а $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}$ — реализованная последовательность событий из полной группы. По Финетти, события $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}$ называются эквивалентными, если $P(E_i/E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}) = P(E_i/E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$ выполняется для любого E_i и для любой последовательности $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_k}$, в которой число появлений одних и тех же явлений, что и в $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}$, одинаково, т. е. частоты появлений одних и тех же событий одинаковы. Финетти доказывает следующее утверждение.

Если события $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}$ эквивалентны, то для достаточно большого k $P(E_i/E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k})$ приближенно равно частоте появления E_i в последовательности событий $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{ik}$ независимо от начальных субъективных вероятностей события реализации этого явления.

Этим результатом Финетти объясняет тот факт, что в случаях, когда события эквивалентны, все индивидуумы назначают одинаковые субъективные вероятности.

В этой концепции развивается проблема вероятности индивидуального события. В частотной концепции (которую иногда называют концепцией объективной вероятности) эта проблема

не рассматривается вообще. Сторонники частотной трактовки пришли к выводу, что теория вероятностей в этом случае просто неприменима.

Как субъективисты в теории вероятностей выступали Рамсей, Севейдж и другие. Впервые Кейнс [Keynes, 1962], а позже Джеффрис [Jeffreys, 1939] рассматривали понятие вероятности как степени правдоподобия. В этом же направлении потом появились работы Поппера.

Все эти работы по обоснованию теории вероятностей и понятия вероятности не оказали большого влияния в науке, хотя они довольно широко распространены. Характеристику этой точки зрения мы читаем, например, у Кларка: «Оценка вероятности, даваемая отдельным человеком, зависит от индивидуума, т. е. она достаточно субъективна... Для каждого события имеется вероятность, которую отдельные индивидуумы могут оценивать по-разному». Но вероятность как научное понятие может существовать благодаря тому, что субъективные оценки выравниваются и совпадают. «Существуют совпадения в оценке вероятности. В совпадении оценок (субъективных) мы и видим корни вероятностей... Вероятность выступает как осреднение этих оценок» [Clarke, 1954].

5. Аксиоматика А. Н. Колмогорова

Хотя обоснованием теории вероятностей занималось много математиков и отдельные аксиоматики (в первую очередь аксиоматика С. Н. Бернштейна) имели несомненный успех, все же началом нового этапа в развитии теории вероятностей считается аксиоматика А. Н. Колмогорова.

Начиная с 20-х годов XX в. характер исследований по теории вероятностей во многом определялся идеями теории множеств и теории функций. Оказалось, что можно установить глубокие аналогии между основными понятиями теории множеств и метрической теорией функций, с одной стороны, и основными понятиями теории вероятностей — с другой. Так были установлены аналогии между мерой множества и вероятностью события, интегралом и математическим ожиданием и др.

Впервые такие идеи стал привлекать в теорию вероятностей Борель начиная с 1905 г.

Работы в этом направлении осветили логические основания теории вероятностей с новой точки зрения. Теория вероятностей, которая «долгое время стояла особняком в системе математических дисциплин» [Медведев, 1975, с. 16—17], этими аналогиями была приближена к основным проблемам математики, ее содержание обогатилось новыми методами исследования и новыми постановками задач, это в свою очередь позволило довести до конца решение классических задач.

В связи с этим возникла потребность в аксиоматизации теории вероятностей исходя из теоретико-множественных представлений.

Такое аксиоматическое обоснование теории вероятностей было выполнено А. Н. Колмогоровым, который начиная с середины 20-х годов занимался приведением в строгий логический порядок этих новых идей. В результате глубоких исследований появилась его книга [Kolmogorov, 1933], а вскоре вышел и ее русский перевод [Колмогоров, 1936] и переиздание [Колмогоров, 1974].

Следует отметить, что впервые трактовка вероятности как меры была дана в 1923 г. в работе А. Ломницкого («Nouveaux fondements du calcul des probabilités»). Ломницкий — польский математик, который, кроме теории вероятностей, занимался теорией функций действительного переменного, математической картографией, методикой математики. Ломницкий погиб от рук фашистских захватчиков в июле 1941 г. (см. [Alexiewicz, 1954]).

Только после аксиоматизации теории вероятностей, которая была выполнена в книге Колмогорова, эта наука заняла равноправное место среди других математических дисциплин. «Теория вероятностей, как точная математическая теория, в надлежащем объеме впервые была построена А. Н. Колмогоровым» [Ван дер Варден, 1960, с. 11].

Рассмотрим аксиоматику Колмогорова. Прежде чем приступить к формулировке аксиом, Колмогоров делает ряд общих замечаний. «Теория вероятностей как математическая дисциплина может и должна быть аксиоматизирована совершенно в том же смысле, как геометрия или алгебра. Это означает, что, после того как даны названия изучаемым объектам и их основным отношениям, а также аксиомы, которым эти отношения должны подчиняться, все дальнейшее изложение должно основываться исключительно лишь на этих аксиомах, не опираясь на обычное конкретное значение этих объектов и их отношений» [Колмогоров, 1974, с. 9]. Далее Колмогоров говорит о том, что любая аксиоматическая теория допускает различные интерпретации. Аксиоматическая теория вероятностей также допускает наряду с теми интерпретациями, из которых она возникла, и много других. Это открывает возможность и для приложений теории вероятностей к таким областям науки, которые достаточно далеки от понятий вероятности и случайных событий. Сделав замечание относительно того, что аксиоматизация теории вероятностей может быть проведена различными способами, Колмогоров считает, исходя из соображений простоты как самой системы аксиом, так и построения из нее теории, что «представляется наиболее целесообразным аксиоматизирование понятий случайного события и его вероятности» [Там же, с. 10].

Пусть имеются наблюдения или испытания, которые хотя бы теоретически допускают возможность неограниченного повторения. Каждое отдельное испытание может иметь тот или иной исход в зависимости от случая. Совокупность всех этих возможных исходов образует множество Ω, которое является первым основным понятием аксиоматики. Это множество Ω называется множеством

элементарных событий. Что из себя представляют элементарные события, являющиеся элементами этого множества, для дальнейшего логического построения совершенно безразлично, как безразлично для аксиоматического построения геометрии, что́ мы будем понимать под словами «точка», «прямая» и т. п.

Любое подмножество множества Ω, т. е. любую совокупность возможных исходов, называют событием. Или другими словами: случайными событиями называются элементы множества F подмножеств из Ω. Случайная величина является теперь функцией от элементарного события, тогда как до Колмогорова это понятие само считалось исходным. Далее в качестве событий рассматриваются не все подмножества Ω, а только некоторый класс подмножеств, причем предполагается, что конечные и счетные объединения и пересечения событий — снова события.

В аксиоматической теории Колмогорова каждому событию, которое мы рассматриваем, ставится в соответствие некоторое положительное число, которое называется вероятностью данного события. При этом абстрагируются от всего того, что помогало сформулировать это понятие, например от частоты. Это дает возможность интерпретировать аксиоматику не только вероятностным способом. Тем самым значительно расширяются возможности теории вероятностей.

После этих предварительных замечаний приведем аксиомы Колмогорова.

«Пусть Ω — множество элементов ω, которые мы будем называть *элементарными событиями*, а $\mathcal{F}$ — множество подмножеств из Ω. Элементы множеств $\mathcal{F}$ будем называть *случайными событиями* (или просто — *событиями*), а Ω — *пространством элементарных событий*.

I. *$\mathcal{F}$ является алгеброй множеств* [1].

II. *Каждому множеству A из $\mathcal{F}$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число* $\mathbf{P}(A)$. *Это число называется вероятностью события A.*

III. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

IV. *Если A и B не пересекаются, то* $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ [Там же, с. 10—11].

Полем вероятностей называется совокупность объектов $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, удовлетворяющая аксиомам I—IV.

---

[1] «Система $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется *алгеброй*, если $\Omega \in \mathcal{F}$, соединение, пересечение и разность двух множеств системы опять принадлежат этой системе. Мы обозначаем пересечение множеств A и B через $A \cap B$ или AB, их соединение — через $A \cup B$, разность — через $A \setminus B$. Дополнительное множество $\Omega \setminus A$ к множеству A обозначаем $\bar{A}$. Через $\varnothing$ обозначается пустое множество. Если множества A и B не пересекаются ($AB = \varnothing$), то их соединение $A \cup B$ будет обозначаться также через $A + B$ и называться суммой. Множества из $\mathcal{F}$ будем в дальнейшем обозначать большими латинскими буквами» [Там же, с. 10].

Система приведенных аксиом непротиворечива, так как существуют объекты, которые удовлетворяют этим аксиомам. Например, пусть Ω состоит из одного элемента ω, $\mathcal{F}$ — из Ω и пустого множества, при этом $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ и $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Система аксиом Колмогорова неполна. Даже для одного и того же множества Ω в множестве $\mathcal{F}$ мы можем выбрать вероятности различными способами. Неполнота системы аксиом не является результатом их неудачного выбора, она отражает существо вероятностных вопросов. В задачах теории вероятностей могут встретиться такие положения, когда при рассмотрении одинаковых множеств случайных событий нужно сопоставить их с разными вероятностями. Например, рассматривая две игральные кости, одну правильную, а другую неправильную, мы будем задавать разные системы вероятностей для одного и того же множества событий.

Основная структура построения полей вероятностей Колмогоровым изложена в следующих словах: «Простейшие поля вероятностей строятся следующим образом. Берутся произвольное конечное множество $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ и произвольное множество $\{p_1, \ldots, p_k\}$ неотрицательных чисел с суммой $p_1 + \ldots + p_k = 1$. За $\mathcal{F}$ принимается совокупность всех подмножеств A из Ω и для $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_\lambda}\}$ полагается $\mathbf{P}(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_\lambda}$.

В этом случае говорят, что $p_1, \ldots, p_k$ суть вероятности элементарных событий $\omega_1, \ldots, \omega_k$ или просто *элементарные вероятности*. Так получаются все возможные *конечные* поля вероятностей, в которых $\mathcal{F}$ состоит из совокупности всех подмножеств из Ω (при этом поле вероятностей называют конечным, если множество Ω конечно)» [Там же, с. 11].

Элементарной теорией вероятностей называется часть теории вероятностей, в которой имеют дело с вероятностями конечного числа событий. Аксиомы, приведенные выше, относятся к элементарной теории; выводы, которые могут быть сделаны при помощи этих аксиом, естественно применяются и к вопросам, связанным с бесконечным числом случайных событий. Но при изучении последних применяются также новые принципы. Для случая бесконечного числа случайных событий Колмогоров вводит следующую аксиому непрерывности.

«V. *Для убывающей последовательности* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ *событий из* $\mathcal{F}$ *такой, что*

$$\bigcap_n A_n = \varnothing,$$

имеет место равенство

$$\lim_n \mathbf{P}(A_n) = 0$$» [Там же, с. 26].

Для конечной системы множеств $\mathcal{F}$ эта аксиома следует из первых четырех аксиом.

Следует подчеркнуть, что аксиома V имеет в математике существенное значение.

Мы не будем рассматривать построение всего здания теории вероятностей из этих аксиом. Довольно подробное изложение этого вопроса можно найти почти в любом обширном курсе теории вероятностей.

Отметим только те параллели между осовными понятиями теории вероятностей и основными понятиями теории множеств, которые подчеркивает Колмогоров.

«Мы определили объекты нашего дальнейшего изучения — случайные события — как множества. Многие теоретико-множественные понятия обозначаются, однако, в теории вероятностей другими именами. Мы приведем здесь краткий указатель таких понятий.

В теории множеств	*Для случайных событий*
1. A и B не пересекаются, т. е. $AB = \varnothing$.	1. События A и B несовместны.
2. $AB \ldots N = \varnothing$.	2. События $A, B, \ldots, N$ несовместны.
3. $AB \ldots N = X$.	3. Событие X заключается в одновременной реализации всех событий $A, B, \ldots, N$.
4. $A \cup B \cup \ldots \cup N = X$.	4. Событие X заключается в наступлении по крайней мере одного из событий $A, B, \ldots, N$.
5. Дополнительное множество $\bar{A}$.	5. Противоположное событие $\bar{A}$, состоящее в ненаступлении события A.
6. $A = \varnothing$.	6. A невозможно.
7. $A = \Omega$.	7. A должно необходимо наступить.
8. Система $\mathfrak{A}$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образует *разложение* множества Ω, если $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ (это уже предполагает, что множества A_i попарно не пересекаются).	8. *Испытание* $\mathfrak{A}$ заключается в том, что устанавливают, какое из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ происходит; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются при этом возможными исходами испытания $\mathfrak{A}$.
9. B является подмножеством $A: B \subseteq A$.	9. Из осуществления события B с необходимостью следует осуществление A» [Там же, с. 14—15].

Только после аксиоматики Колмогорова теория вероятностей окончательно стала полноправной математической дисциплиной. Этого не произошло ни после аксиоматики, предложенной Мизесом, ни после аксиоматики Бернштейна.

Аксиоматика Бернштейна сыграла большую роль в истории теории вероятностей, так как она была первой аксиоматикой, не содержащей никаких противоречий, она привлекла внимание к этим вопросам, стимулируя исследования в этом направлении. Но это была только предыстория, а не начало нового этапа развития теории вероятностей. В аксиоматике Бернштейна понятие вероятности не относится к числу основных понятий, а выражается через другие понятия. При этом Бернштейн стремится к тесному сближению математической теории с эмпирическими вероятно-

стями. Все это делает аксиоматику Бернштейна очень громоздкой. Давать различные интерпретации аксиомам Бернштейна очень неудобно, а в отдельных случаях и невозможно, так как эти аксиомы еще не полностью формализованы.

От всех этих недостатков свободна аксиоматика Колмогорова. В ней произошло абстрагирование от частотной картины, но оно дает возможность всегда перейти от формальной схемы к реальным процессам. Естественно, что выводы этой теории могут быть истолкованы в частотных терминах.

Любое аксиоматическое определение является определением через перечисление основных свойств определяемого объекта. Как и всякое другое аксиоматическое определение, определение вероятностей допускает возможность различных интерпретаций не только вероятностного характера.

Аксиоматическое определение вероятности, предложенное Колмогоровым, является наиболее распространенным в настоящее время.

Успех аксиоматики Колмогорова объясняется прежде всего тем, что она тесно связала теорию вероятностей с метрической теорией функции и тем самым открыла перед теорией вероятностей арсенал хорошо разработанных методов исследования, позволила охватить единой, достаточно простой схемой классические главы теории вероятностей и новые ее разделы. Но, естественно, аксиоматика Колмогорова не является единственно возможной. Вскоре после нее появился ряд других аксиоматических систем (см., например, [Los, 1955]).

В. И. Гливенко [Гливенко, 1939] удалось доказать, что подход к аксиоматизации теории вероятностей, предложенный Бернштейном и относящийся к рассмотрению полных нормированных булевых алгебр, совпадает с аксиоматикой Колмогорова.

В аксиоматике Колмогорова схвачены наиболее общие, абстрактные свойства вероятности, которые можно интерпретировать самыми различными способами.

Понятие множества, которое используется в языке аксиоматики Колмогорова, не лишено хорошо известных парадоксов. Для теории множеств нет удовлетворительного способа преодоления этих парадоксов. Для их избежания в теории множеств не рассматривают слишком больших и расплывчатых множеств (например, множество всех множеств). В аксиоматике Колмогорова подобные множества также не рассматриваются, так что парадоксы теории множеств в этом смысле прямо не угрожают теории вероятностей.

Линник так характеризует аксиоматику Колмогорова: «Аксиоматика А. Н. Колмогорова (Москва) описывается в терминах σ-алгебры подмножеств множества элементарных событий и является (весьма удобным) частным случаем нормированной булевой алгебры» [Линник, 1970, с. 246].

В настоящее время существуют разнообразные подходы к вероятности, но после работ А. Н. Колмогорова многие связывают

ее с мерой. Биркгоф называет эту точку зрения наиболее влиятельной: «Мы будем следовать наиболее влиятельной математической школе и отождествим вероятность с мерой на базе постулатов» [Биркгоф, 1952, с. 275].

В последние десятилетия теория вероятностей развивалась прежде всего на основе аксиоматики Колмогорова. Большинство работ излагает теорию вероятностей на языке теории множеств и теории меры в той форме, которая была предложена Колмогоровым в его аксиоматике.

Относительно аксиоматических основ теории вероятностей ведутся и сегодня споры и дискуссии.

В рамках аксиоматического исчисления понятие вероятности не имеет развернутого определения. Оно рассматривается как исходное понятие, поставленное в условия, сформулированные в аксиомах.

Можно провести аналогию с определением неизвестных системой алгебраических уравнений. Подобно тому как коэффициенты и неизвестные в системе уравнений могут принимать самые различные числовые значения, так и понятие вероятности в системе аксиом может получить различный смысл в различных вероятностных суждениях:

«Необходимо отдать себе отчет в том, что произвольное понятие, удовлетворяющее требованиям аксиоматики, может быть признано в качестве понятия вероятности. В действительности может оказаться, что в одном случае удобнее принять одну интерпретацию, в другом — иную» [Рассел, 1957, с. 356].

Сущность проблемы заключается в отыскании связи между системой аксиом, определяющих вероятность, и содержанием вероятностных суждений. Математическая схема требует, чтобы вероятность $p(a, b)$ рассматривали как число, характеризующее определенные отношения, возникающие между аргументами a и b. Вероятность можно рассматривать как свойство, присущее a относительно b, выраженное числом.

Спор по поводу интерпретации понятия вероятности в основном идет относительно того, что означают a и b. Аналогичные вопросы возникают при интерпретации различных математических теорий. Любая аксиоматизированная математическая теория может иметь различные интерпретации. Для понятия вероятности также существует много различных интерпретаций.

К одной группе можно отнести такие интерпретации, которые говорят, что вероятность является характеристикой суждений, т. е. вероятность характеризует отношение суждений к чему-то, в частности к другим суждениям. Существуют, например, интерпретации, согласно которым вероятность есть логическая категория, а вероятностные суждения говорят о логических отношениях между суждениями, которые подставляются в качестве переменных a и b в выражение $p(a, b)$.

В других интерпретациях утверждается, что вероятностные суждения характеризуют отношение субъекта к суждениям.

Существует также мнение о том, что вероятность является мерой истинности суждения и т. п.

К другой группе относятся интерпретации, согласно которым вероятностные суждения непосредственно касаются объективной действительности. Сюда в первую очередь относится частотная интерпретация, в соответствии с которой вероятность характеризует некоторым образом относительную частоту.

Относительно не так давно Колмогоров [Колмогоров, 1956, 1965] предложил определение случайной последовательности, используя при этом аппарат теории алгоритмов. Идея понятия случайной последовательности здесь тесно связана с определением количества информации. Эта идея была использована Мартин-Лёфом в попытке построения новых оснований теории вероятностей [Martin-Löf, 1966, 1969; Колмогоров, 1965]. Идеи Колмогорова и Мартин-Лёфа должны привести к устранению «неудовлетворенности, связанной с известной расплывчатостью наших концепций, относящихся к связям между математической теорией вероятностей и реальными «случайными явлениями» вообще» [Martin-Löf, 1969].

В настоящее время существуют и другие попытки построения оснований теории вероятностей.

В теории вероятностей можно получать результаты, имеющие в виду ту или иную интерпретацию. Так, например, законы больших чисел, предельные теоремы нацелены на частотную концепцию вероятности (концепция объективной вероятности). Этим вопросам, как правило, посвящена бóльшая часть учебников по теории вероятностей. Скорее всего этим и объясняется то, что в учебниках теория вероятностей определяется как математическая дисциплина, изучающая закономерности случайных явлений. Такое определение предмета теории вероятностей, по-видимому, ограниченно.

«Возможность многократного воспроизведения одних и тех же условий, допускающих осуществление события, существенно ограничивает круг явлений, к которым применимо понятие математической вероятности. Плодотворно это понятие может применяться лишь к массовым явлениям, случающимся очень много раз» [Яглом А., 1960, с. 244].

Что касается существенной черты теории вероятностей, то Лоэв сформулировал ее так: «Свойство семейства функций, определенных на пространстве с мерой, является теоретико-вероятностным тогда и только тогда, когда оно не изменяется при замене этого семейства другим семейством с теми же распределениями» [Лоэв, 1962, с. 183].

Таким образом, концепция объективной вероятности не имеет какого-то привилегированного отношения к исчислению вероятностей, а наличие большого количества результатов, исходящих из концепции объективной вероятности внутри этого исчисления, объясняется как спросом естественных наук, так и плодотвор-

ностью использования хорошо разработанного аппарата теории множеств и теории меры. Основания теории вероятностей, исходящие из этой концепции, развиваются в работах Колмогорова и Мартин-Лёфа.

Ни аксиомы, ни классический подход к вероятности, ни статистический не могут дать исчерпывающего определения содержания понятия вероятности, они являются лишь известными приближениями ко все более полному его раскрытию.

6. Логическая вероятность

Среди различных подходов к вероятности мы кратко останавливаемся на так называемой логической вероятности. Этот подход к вероятности всегда вызывал довольно противоречивую трактовку.

Если дедуктивные выводы дают достоверные знания, то индукция дает только вероятные. В связи с этим делаются попытки исследовать индуктивные выводы при помощи вероятностных методов. Мы не будем касаться истории развития индуктивных методов и взглядов на индукцию, а остановимся только на роли вероятности в современных индуктивных выводах. «Существенное различие между дедукцией и индукцией с современной точки зрения состоит в том что дедуктивный вывод дает достоверные заключения, в то время как индуктивный — только вероятностные» [Рузавин, 1967, с. 74].

Современное освещение связи вероятности с индуктивными выводами довольно четко дано в следующих словах: «Индукция принципиально отлична от дедукции. Последняя всегда представляет собой со стороны вывода такую связь между суждениями, когда одно из них необходимо следует из других. Это обстоятельство соответствует тому, что при дедуктивном выводе информация заключения всегда полностью содержится в информации посылок. При индуктивном выводе такого полного включения одной информации в другую нет, можно говорить лишь об их перекрещивании. В таком случае возникает вопрос о степени логической связи заключения (гипотезы) и посылок (предварительного знания). Эта степень связи может быть представлена функцией $C\,(h/l)$, где h — некоторая гипотеза, а l — знание, которое должно обосновать гипотезу. В том случае, когда функция $C\,(h/l)$ имеет значение 1, гипотеза логически следует из знания l. Это и есть область дедуктивного вывода. Если функция $C\,(h/l)$ равна 0, то это означает, что гипотеза h противоречит знанию l. Во всех остальных случаях мы имеем дело лишь с вероятностным следованием. Таким образом, оценка степени связи гипотезы и знания лежит в пределах $0 \leqslant C\,(h/l) \leqslant 1$ и может получить в этих пределах любое цифровое выражение, т. е. эта логика является бесконечнозначной» [Современные проблемы..., 1970, с. 192].

Возникает естественный вопрос: что понимается под вероятностью, когда речь идет о связи между посылками и заключением в индуктивных выводах?

Прежде всего вероятность здесь отражает отношение между высказываниями, а не связь между реальными объектами или процессами. Поэтому такую вероятность часто называют логической вероятностью в отличие от статистической, которую иногда называют эмпирической.

Иногда логическую вероятность трактуют субъективно, считая, что она представляет степень веры субъекта в правдоподобие какого-либо высказывания. Но эта вера меняется не только от одного лица к другому, но и у одного и того же субъекта может изменяться с течением времени. По нашему мнению, такие вопросы можно отнести скорее к психологии, чем к логике и математике. Субъективная трактовка логической вероятности не выдерживает критики и не имеет достаточно серьезных приверженцев.

Одним из первых, кто выдвинул концепцию логической вероятности, был Кейнс. Он отчетливо подчеркивал объективный характер такой вероятности: «Вероятность не субъективна. Она не является, так сказать, предметом человеческого каприза. Высказывание вероятно не потому, что мы думаем о нем так. Как только даны факты, которые определяют наше познание, то в этих обстоятельствах что считать вероятным, фиксируется объективно и не зависит от нашего мнения. Теория вероятности является логической, таким образом, потому, что она имеет дело со степенью веры, которая является *разумной* при данных условиях, а не просто с фактической верой частных индивидуумов, которые могут быть как разумными, так и не разумными» [Keynes, 1962, с. 5]. Объективный подход к логической вероятности развивали и другие ученые.

Наиболее спорным в настоящее время является вопрос о численной оценке логической вероятности. Большинство ученых придерживаются мнения, что при употреблении логической вероятности следует пользоваться только сравнительной оценкой, т. е. оценивать вероятность, используя только понятия «больше», «меньше», «равно». Этот подход разделяется, как правило, логиками.

Карнап и его последователи стоят на точке зрения численной оценки вероятностных высказываний. Но пока такие системы бедны по содержанию и фактически неприемлемы даже в простейших случаях, с которыми имеют дело естественные науки.

Сторонники чисто частотной концепции вероятности (например, Г. Рейхенбах) пытаются свести к ней и логическую вероятность. Но такой подход вызывает возражения в первую очередь потому, что индуктивную вероятность можно отнести и к единичным событиям, которые не обладают частотой, а следовательно, с точки зрения частотной концепции не обладают вероятностью.

Итак, подводя некоторый итог, мы можем сказать, что в настоящее время имеются в основном три подхода к логической (индуктивной) вероятности.

Первый из них состоит в аксиоматическом описании свойств логической вероятности (Кейнс, Джеффрис и др.). Но, как и любой системе аксиом, аксиомам логической вероятности можно давать различные интерпретации. В этом случае естественнее говорить об индуктивной интерпретации системы аксиом. Аксиомы отражают формальные свойства логической вероятности, которые присущи и многим другим объектам, но они не вскрывают специфики логической вероятности.

Второй подход — так называемый семантический. Он базируется на аналогии между дедукцией и индукцией. В дедуктивном выводе результат с необходимостью следует из посылок; в индуктивном рассуждении может идти речь только о частичном выводе, который не обладает необходимым характером, его можно рассматривать как вероятный вывод. Таким образом, логическая вероятность является степенью подтверждения одного высказывания другим. Такой подход подробно был разработан Карнапом [Карнап, 1971, Carnap, 1950]. Основным понятием при этом является степень подтверждения, которой приписывается численное значение. Но такой подход имеет ряд существенных недостатков. Его трудно применять к физике и другим наукам, в которых понятие вероятности играет столь существенную роль.

Третий подход — это частотная интерпретация логической вероятности, которая впервые была построена Г. Рейхенбахом [Reichenbach, 1949]. Логическая интерпретация здесь выступает как частный случай частотной.

В настоящее время нет общепринятой и распространенной трактовки логической вероятности. Исследования в этом направлении ведутся многими.

7. Вероятность в современной науке

Большая роль статистических закономерностей всем известна. Статистические закономерности проявляются только в массовых явлениях, поэтому естественно стремление для их обнаружения и установления производить массовые эксперименты. Но производить каждый раз массовый эксперимент вряд ли возможно. Дело облегчается тем, что, установив некоторые статистические закономерности экспериментально, из них можно получать при помощи общих положений и допущений новые статистические закономерности логическим или вычислительным путем, так дело обстоит почти всегда. Непосредственной обработкой массовых наблюдений выясняются лишь самые простые из статистических закономерностей, т. е. находятся лишь некоторые исходные вероятности. Затем при помощи законов теории вероятностей из этих исходных вероятностей вычисляются вероятности более сложных

явлений, и на основе этих вычислений делаются выводы о статистических закономерностях, управляющих интересующими нас сложными явлениями. Эта схема полностью соответствует высказыванию П. Л. Чебышева о том, что теория вероятностей занимается вычислением вероятностей сложных событий, когда нам даны вероятности простых событий.

Иногда удается обойтись без собирания массового статистического материала, так как исходные вероятности могут быть определены из соображений симметрии.

Вывод о том, что правильная игральная кость при бросании падает на каждую из своих граней с одинаковой вероятностью $^1/_6$, был сделан намного раньше, чем собран достаточный для оправдания этого вывода статистический материал. Систематически опыты такого рода производились в XVIII, XIX и XX вв., когда теория вероятностей была уже достаточно разработанной наукой. Результаты таких опытов приведены в книге Романовского [Романовский, 1939].

Результат этой проверки был удовлетворителен, но распространение таких экспериментов не представляет большого интереса. Они могут преследовать только некоторые педагогические цели. С чисто научной точки зрения эти эксперименты многого не дают, так как если будет получен отрицательный результат, то он так же хорошо объясним при помощи теоремы Я. Бернулли, как и положительный. Кроме того, никто не производил, например, опытов с бросанием правильного двенадцатигранника, но у нас нет никаких сомнений, что вероятность выпадения каждой грани равна $^1/_{12}$.

Получение исходных вероятностей из соображений «симметрии» играет большую роль во многих задачах. Например, в задачах, связанных со столкновением или сближением беспорядочно двигающихся молекул газа или звезд Галактики. В таких серьезных задачах предпочитают хотя бы косвенно проверять сделанные допущения.

Выясним, в каких случаях можно говорить, что событие A имеет при условии S вероятность $P(A/S) = p$. Прежде всего необходимо, чтобы событие A было случайным, понимая под этим, что при выполнении условий S оно иногда наступает, а иногда не наступает. Для удобства к числу случайных событий присоединяют события, наступающие при данных условиях неизбежно, и приписывают им вероятность 1, т. е. $P(A/S) = 1$. Значение равенства $P(A/S) = p$ состоит в том, что при осуществлении условий S большое число раз n отношение числа случаев m, в которых событие A появляется, к общему числу n повторений условий S оказывается близким к $m/n \approx p$. Таким образом, утверждение о существовании определенной вероятности имеет познавательный смысл лишь в предположении, что условия S могут воспроизводиться неограниченное число раз.

В каждой серии воспроизведения условий S (в каждой серии испытаний) какая-то частота m/n всегда получается. Смысл

утверждения о существовании при условиях S для события A определенной вероятности p состоит в том, что в различных достаточно длинных сериях испытаний частота приблизительно одинакова:

$$\frac{m_1}{n_1} \approx \frac{m_2}{n_2} \approx \ldots \approx \frac{m_s}{n_s} \approx p.$$

Эта устойчивость частот является непосредственно наблюдаемым свойством того типа случайных явлений, к которым применимо понятие вероятности. Случайности такого рода иногда называют стохастическими. Их можно называть вероятностными случайностями.

При таком определении вероятности мы допустили две неточности, бросающиеся в глаза. Мы, во-первых, не указали, насколько велики должны быть n_i, чтобы устойчивость частот проявилась, и, во-вторых, мы не указали, каковы допустимые отклонения частот m_s/n_s друг от друга и от нормального уровня p при различных сериях (т. е. при различных n_i). Но такие неточности пока неизбежны. Они не больше, чем неточности типа понятий точки и прямой в физическом понимании этих слов.

Но, кроме того, существует неясность относительно способов формирования тех серий, в которых должна наблюдаться устойчивость частот появления события A.

К статистическим и вероятностным методам исследования приходится обращаться тогда, когда индивидуальный исход события предсказать невозможно. При этом заботятся о том, чтобы нельзя было заранее выделить те случаи, в которых явление A будет иметь тенденцию появиться чаще или реже, чем с нормальной частотой p.

Так организуются, например, тиражи лотерей. Если в данном тираже из общего числа билетов N на M билетов падает выигрыш, то вероятность отдельного билета выиграть равна $p = M/N$. Это значит, что каким бы образом мы ни выделили заранее до тиража серию билетов достаточно большой численности n, мы можем быть практически уверены, что отношение μ/n (числа μ выигравших билетов выделенной серии к общей численности n этой серии) окажется близким к p. Например, лица, предпочитающие приобретать четные номера билетов, не получат никакого преимущества над теми, которые предпочитают приобретать нечетные номера, и т. п. Рассмотрим еще один пример. При испытании снарядов мы будем получать отклонения от средней точки падения меньше определенного заранее вероятного отклонения β приблизительно в половине случаев. Это соотношение сохранится и в том случае, если мы отдельно подсчитаем число отклонений, меньших для четных или нечетных выстрелов, и т. п. Но вполне возможно, что, произведя отбор особенно однородных (в отношении их веса и т. п.) снарядов, мы могли бы рассеивание несколько уменьшить.

Говорить о том, что событие A является «вероятностно случайным», и приписывать ему определенную вероятность $p = P(A/S)$

можно только тогда, когда указан класс допустимых способов формирования серий испытаний. Указание этого класса мы будем считать включенным в «условия» S.

При заданных условиях S свойство события A быть вероятностно случайным и иметь вероятность $p = P(A/S)$ выражает объективный характер связи между условиями S и событием A. Не существует событий абсолютно случайных, события являются случайными или необходимыми в зависимости от того, в какой связи они рассматриваются, но в определенных условиях событие может быть случайным объективно, и это не зависит от состояния знаний какого бы то ни было наблюдателя. Если вообразить себе наблюдателя, который мог бы улавливать во всех деталях отличительные свойства и особые обстоятельства полета снарядов и, следовательно, предсказывать индивидуально для каждого снаряда отклонения от средней траектории, то его присутствие не помешало бы снарядам рассеиваться по законам теории вероятностей.

Формирование серий, в которых проявляется тенденция к постоянству частот в смысле их группирования вокруг нормального значения — вероятности, тоже происходит в природной обстановке совершенно независимо от нашего вмешательства. Например, в силу вероятностно случайного характера движений молекул в газе количество молекул, ударяющихся даже за очень малые промежутки времени в какую-либо площадку стенки сосуда, оказывается пропорциональным площади этой площадки и длине промежутка времени. Отклонения от этой пропорциональности в тех случаях, когда число ударов невелико, тоже следуют законам теории вероятностей и вызывают явления типа броуновского движения.

В понятие «условий» S, при которых событие A имеет определенную вероятность $P(A/S)$, входит указание «недопустимых» способов формирования серий.

Рассмотрим события A и B при одних и тех же условиях, и пусть их вероятности и вероятность совмещения AB будут $P(A/S)$, $P(B/S)$, $P(AB/S)$.

На каждой серии испытаний, сформированной в соответствии с условиями S, отберем только те, в которых событие B появилось, и в таких сокращенных сериях подсчитаем частоту появления события A. Эта новая частота будет группироваться около значения $P(A/SB) = \frac{P(AB/S)}{P(B/S)}$, которое и назовем условной вероятностью события A при условии, что событие B произошло.

Общие условия S обычно не пишут. Вероятности $P(A)$, $P(B)$ называют безусловными вероятностями, а вероятность $P(A/B) = P(AB)/P(B)$ условной.

Событие A называется независимым от события B, если его условная вероятность при условии появления события B равна его безусловной вероятности, т. е. если $P(A/B) = P(A)$, это равенство

равносильно равенству $P(AB) = P(A)P(B)$. Последнее равенство в теории вероятностей принимают за определение независимости двух событий A и B. Это определение находится в соответствии со свойствами реально независимых в причинном смысле явлений.

Но такого рода «независимость» не следует абсолютизировать. Например, в силу закона всемирного тяготения перемещение спутников Юпитера оказывает некоторое влияние на полет артиллерийского снаряда. На практике с такого рода влияниями мы можем не считаться. «Независимость» событий ни в какой мере не противоречит принципу всеобщей связи всех явлений, а является лишь его необходимым дополнением.

Независимость двух случайных величин ξ и η, способных принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, по определению обозначает, что при любых i и j события $A_i = \{\xi = x_i\}$, $B_j = \{\eta = y_j\}$ независимы. Как определение независимости двух событий, так и определение независимости двух случайных величин значительно шире понятия реальной независимости в смысле принадлежности к двум причинно несвязанным кругам явлений.

Совмещение двух событий состоит в появлении обоих событий ($C = AB$). К нему примыкает понятие сложения событий, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно (а может быть, и оба) из событий ($C = A + B$).

События называются несовместимыми, если их совмещение невозможно. Основной аксиомой теории вероятностей (элементарной) является требование, чтобы при условии несовместимости двух событий A и B соблюдалось равенство $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Все сказанное об основных понятиях теории вероятностей аналогично, например, свойствам плоских фигур и их площадей. Будем понимать под $A \cdot B$ пересечение (общую площадь) двух фигур, под $A + B$ их соединение, введем еще условно «пустую» фигуру. Если теперь будем считать, что $P(A)$ есть площадь фигуры A, то аналогия будет полной.

Такими же свойствами обладают объемы трехмерных фигур. Наиболее общим случаем, который охватывает как частные случаи теорию площадей и теорию объемов, является общая теория меры.

В теории вероятностей имеются по сравнению с общей теорией меры (или специально с теорией площадей и объемов) некоторые специфические черты. Вероятность не бывает больше единицы. Эту максимальную вероятность имеют необходимые события U: $P(U) = 1$.

При рассмотрении аналогии с теорией меры оказалось, что вся теория вероятностей с формальной стороны может быть построена как теория меры с одним только допущением, что мера «всего пространства» U равна единице.

Возможны и другие подходы, которые, например, сближают теорию вероятностей с так называемыми «булевскими алгебрами». Таким образом, оказалось возможным построение теории вероятностей как аксиоматизированной чисто математической дисциплины. Это не только внесло ясность в формальное строение теории вероятностей, но и способствовало прогрессу как самой теории вероятностей, так и смежных с ней математических теорий.

В теории вероятностей были использованы методы, разработанные в метрической теории функций действительного переменного, а вероятностные методы оказались применимыми всюду, где выполнены аксиомы теории вероятностей, хотя бы данная область не имела ничего общего с реальной «случайностью».

Гипотеза о вероятностном характере какого-либо явления лишь очень редко обосновывается непосредственной статистической проверкой. Только при первом проникновении вероятностных методов в какую-либо новую область дело часто начинается с чисто эмпирической фиксации постоянства частот. Для того чтобы статистически обнаружить постоянство частот с точностью до ε, необходимо пользоваться сериями примерно по $n = 1/\varepsilon^2$ испытаний.

Гораздо чаще применение вероятностных законов вводится на основании соображений о практической независимости отдельных рядов явлений и т. п.

Исходя из статистического определения вероятности, которое в настоящее время является наиболее распространенным, вероятностью обладают только массовые случайные события с устойчивой частотой. При этом всегда вопрос о вероятности того или иного события имеет смысл только в точно определенных условиях. Всякое существенное изменение условий влечет за собой изменение вероятности. Каждое имеющее познавательную ценность суждение о том, что данное событие при выполнении определенных условий имеет определенную вероятность, в своеобразной форме выражает объективную связь, существующую между событием и условиями.

Случайные события обладают тем свойством, что при каждом отдельном наблюдении о появлении события ничего определенного сказать нельзя, но длительные наблюдения над появлением или непоявлением какого-либо случайного события при большом числе повторных испытаний, происходящих при неизменном комплексе условий, показывают, что часто число появлений рассматриваемого события подчиняется устойчивым закономерностям. Пусть при n испытаниях случайное событие появилось m раз. Отношение m/n называется частотой этого события.

Может показаться, что частота случайного события есть число совершенно неопределенное, так как появление или непоявление события есть дело случая. Но рассмотрение реальных случайных массовых событий показывает, что многие из них обладают устойчивой частотой. Устойчивость частоты является свойством, вы-

текающим не из определения понятия частоты, а из поведения определенных физических объектов. Наличие событий с устойчивой частотой есть факт опыта. Случайные события, обладающие устойчивой частотой, играют важную роль в познании действительного мира.

Большие отклонения частоты от значения устойчивой частоты наблюдаются тем реже, чем многочисленнее произведенные испытания. Кроме того, для тех случаев, к которым применимо классическое определение вероятности, это колебание частоты происходит около вероятности события.

Для всех тех явлений, для которых при большом числе испытаний частота события остается почти постоянной, т. е. событие обладает устойчивой частотой, имеет смысл говорить о их вероятности. Количественной характеристикой устойчивой частоты является вероятность. Вероятность есть абстрактное выражение устойчивой частоты случайного явления. Наличие устойчивой частоты типично для случайных массовых явлений. Но не всякое случайное событие имеет устойчивую частоту. Предположение, что при данных условиях для данного случайного события имеется устойчивая частота, должно быть каждый раз специально проверено и обосновано.

При статистическом определении вероятности постоянная величина, около которой происходит колебание частоты, рассматривается как вероятность. Такая вероятность обладает объективным смыслом, не зависящим от познающего субъекта. То, что заключение о наличии у события вероятности можно делать только после некоторых наблюдений, не лишает вероятности объективного содержания; любому познанию предшествует наблюдение и опыт. Так же как и другие объективные свойства явлений и вещей, вероятность существовала и до проведения эксперимента, но она была неизвестна. Так что проведение эксперимента является путем выявления существующих свойств, а не путем образования этих свойств.

Выбор численного значения вероятности является операцией, в некоторой степени неопределенной. Частота, даже устойчивая, колеблется в некотором интервале. Любое число этого интервала может быть принято за вероятность. Это является следствием того, что численная величина вероятности устанавливается из ряда физических наблюдений и измерений. Она поэтому аналогична любой другой величине, являющейся результатом измерения. Пусть устанавливается, например, вес некоторого тела. Многократное взвешивание приводит к нескольким различным результатам. За вес тела мы можем принять любое среднее число, вблизи которого колеблются показания весов. Точно так же если существует число, вблизи которого колеблется частота события, то оно служит некоторой характеристикой этого события, хотя точное значение этого числа не всегда известно. Для уточнения значения вероятности, так же как, например, и для уточнения ве-

са тела, необходимо увеличить, при тех же условиях количество испытаний.

Чем больше число испытаний, тем реже встречаются сколько-нибудь значительные отклонения частоты от вероятности.

Переход вероятных событий в достоверные или невозможные (и, наоборот, переход достоверных событий или невозможных в вероятные) может происходить с расширением и углублением наших знаний. То, что вчера считалось вероятным, сегодня может быть достоверным, или то, что вчера считалось невозможным, сегодня уже считается вероятным, а завтра может быть и достоверным.

Возможен с развитием науки также переход от достоверных событий к вероятным и даже невозможным.

При статистическом подходе к вероятности, который в литературе еще называют объективистским подходом, «понятие вероятности применимо лишь к таким событиям, которые могут быть повторены без изменений условий опыта» [Мостеллер и др., 1969, с. 16]. Но человек, придерживающийся этих взглядов, «не посмеет говорить о вероятности того, что Рим был основан Ромулом, или о вероятности объединения Аргентины и Чили в одну страну в ближайшие 10 лет» [Там же]. Таким образом, при статистическом подходе остается в стороне большая группа задач, которые выпадают из поля зрения теории вероятностей. «Объективист предпочитает давать интерпретации только часто повторяемых событий и не любит строить свои выводы на основе событий других типов» [Там же].

Субъективисты, которые в литературе называются еще персоналистами, рассматривают вероятность как некоторую меру личного доверия к какому-нибудь утверждению, поэтому эти вероятности по отношению к одному и тому же утверждению могут оказаться различными. «Персоналист может применять теорию вероятностей ко всем задачам, которые рассматривает объективист, и ко многим другим» [Там же, с.17]. Когда данных достаточно много, представители обоих направлений обычно получают при решении конкретных задач одинаковые результаты.

В теории вероятностей устанавливаются законы, которым подчинены случайные массовые явления, а следовательно, и их основные характеристики — вероятности. Возникает вопрос: могут ли случайные явления вообще подчиняться закону?

Статистические методы исследования, базирующиеся на законах теории вероятностей, обусловлены тем, что случайные явления сами подчинены законам, которые в математической форме выражаются условиями, накладываемыми на случайные величины при доказательстве законов и теорем. В основе случайных явлений, подчиняющихся законам теории вероятностей, лежит нестатистическая закономерность. Последняя для большого класса явлений выражается в непрерывности распределения скоростей, сил и других величин.

Вопрос о том, является ли теория вероятностей математической наукой, обсуждается на всем протяжении ее истории.

Приведем только некоторые примеры, касающиеся этого вопроса.

Невозможно «относить исчисление вероятностей к чистой математике, хотя эту мысль обнаружил знаменитый Ампер» [Зернов, 1843, с. 23]. Зернов свою точку зрения обосновывает следующим образом. Исчисление вероятностей «не свободно еще от гипотез, подобных эмпирическим формулам... Так ли мы знаем пифагорову теорему, площадь параболы и прочее, как знаем нравственную надежду, но это начало во многих случаях еще вернее начала надежды математической» [Там же, с. 23].

«Теория вероятностей является физической теорией... предмет которой состоит из случайных событий» [Breny, 1958].

Некоторые исследователи считают, что отдельные основные понятия, используемые в теории вероятностей, не являются математическими. Так, одним из важных понятий теории вероятностей является понятие независимости. «Долгое время им пользовались, не понимая четко его сути» [Кац, 1963, с. 8].

«Понятие независимости, хотя и является центральным по важности в теории вероятностей, не есть чисто математическое понятие. Правило умножения вероятностей независимых событий представляет собой попытку формализовать это понятие и на этой основе построить некоторое исчисление» [Там же, с. 24].

Действительно, независимость вводится в теорию вероятностей формально. События A и B называются независимыми, если $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Также высказывались сомнения относительно того, что закон средних, нормальный закон распределения и другие являются математическими утверждениями.

Относительно нормального закона распределения Кац приводит высказывание Пуанкаре, в котором тот сказал (отчасти, несомненно, в шутку), что «в нормальном законе должно быть что-то таинственное, так как математики считают его законом природы, тогда как физики убеждены в том, что он является математической теоремой» [Там же, с. 80]. Гнеденко [Гнеденко, 1970] считает, что еще в конце XVIII в. теория вероятностей не воспринималась как математическая дисциплина. Более того, он пишет, что «еще на рубеже XIX и XX вв. Д. Гильберт в своем знаменитом докладе о центральных нерешенных проблемах математики теорию вероятностей относил к физике» [Там же, с. 89].

В настоящее время теория вероятностей — математическая наука, изучающая с количественной стороны закономерности случайных явлений массового характера. Построение теории вероятностей начинается с изложения системы аксиом, которые одновременно являются и аксиоматическим определением вероятности.

Теория вероятностей на первый взгляд кажется дисциплиной, не похожей на остальные математические дисциплины. Но это только на первый взгляд. После того как событиям приписаны вероятности, которые выражаются числом, теория вероятностей имеет дело только с этими числами. Поэтому она принципиально ничем не отличается от любой другой математической дисциплины.

В XX в. вероятностные трактовки были распространены на многие области человеческих знаний.

Различие между дедукцией и индукцией состоит в том, что, при дедукции вывод с необходимостью, т. е. с достоверностью, следует из посылок, а при индукции заключение является лишь вероятным. При отсутствии противоречащего примера вероятность справедливости заключения возрастает вместе с увеличением количества рассмотренных случаев, но оно никогда не становится достоверным. В XX в. началась математизация индуктивной логики с существенным использованием понятия вероятности.

«В настоящее время анализ логических процессов, изучаемых индуктивной логикой, вошел в круг рассмотрения вероятностной логики как частный случай решения более широкой задачи: определения степени правдоподобия, или вероятности, данного знания на основании некоторой имеющейся (неполной) информации; это позволяет говорить о вероятностной логике как о современной форме индуктивной логики» [Швырев, с. 221].

Вероятностная логика — это логика, которая приписывает высказываниям не только значения истинности или лжи, но и промежуточные значения, которые называются вероятностями истинности высказываний.

Вопрос о точном числовом определении вероятности одних высказываний относительно других является до сих пор предметом дискуссии и решается по-разному представителями разных направлений вероятностной логики. Вычисление вероятностей сложных гипотез, для которых известны вероятности составляющих их высказываний, во всех системах вероятностной логики определяются по правилам теории вероятностей. Вероятностная логика является одной из интерпретаций формального исчисления вероятностей, так как она интерпретирует вид объектов, относительно которых мы можем говорить об их вероятностях. Под концепцией логической вероятности будем понимать концепцию вероятности, развиваемую в рамках индуктивной (вероятностной) логики.

Точка зрения, утверждающая, что вероятность есть количественная мера степени уверенности познающего субъекта, всегда имела много своих сторонников. По существу, эта точка зрения пытается обобщить применение термина «вероятность» в обыденной речи. Употребляя выражения «вероятно», «маловероятно», «невероятно» и т. п., выражают чаще всего свое отношение к вопросу об истинности или ложности какого-либо единичного

суждения. Высказываниям относительно вероятности единичных фактов или каких-либо других определенных суждений при этом приписывают субъективный смысл.

Как мы видели, с развитием науки не удается дать определение вероятности, которое бы всех удовлетворило. Более того, оказывается, что количество понятий вероятности все время увеличивается. В XIX в. мы имели вероятность, геометрическую вероятность, физическую вероятность и некоторые другие; часть понятий существовала недолго и была вскоре забыта; некоторые, например геометрическая вероятность, прочно вошли в науку.

В XX в., в особенности в последние десятилетия, появилось столько определений вероятности, что из них можно составить довольно большой список. Назовем некоторые из них: метематическая вероятность, логическая вероятность, статистическая вероятность, геометрическая вероятность, карнаповские вероятности (один и два), субъективные вероятности, объективные вероятности и много других. Конечно, некоторые из них сводимы друг к другу, но и после этого остается еще много несводимых друг к другу вероятностей [1].

Является ли такое положение особенностью понятия вероятности? Ни в коем случае. В XX в. полиморфизм в языке науки — типичное явление, это особенность науки нашего времени. Причина заключается в том, что под основными понятиями науки понимаются не только формальные определения, но целые концепции. Концепции бывают многогранны, а иногда и не очень определенны — размыты.

Различные высказывания и определения, относящиеся к научным понятиям, — отражение разных граней сложной концепции, которая обозначается этим термином.

В книге Налимова [Налимов 1979] Е. П. Никитина, В. Д. Фрейдлина и А. В. Ярхо привели огромную коллекцию определений термина «статистика». В начале нашего века насчитывалось более 60 определений статистики. В середине века таких определений было около ста, сейчас же их значительно больше. Для иллюстрации приведем некоторые из них.

«Статистику можно определить как сбор, представление, анализ и интерпретацию численных данных» [Там же, с. 286].

«Статистика — общественная наука, изучающая количественную сторону массовых общественных явлений в неразрывной связи с их качественной стороной» [Там же, с. 287].

«В противоположность теории вероятностей — это раздел прикладной математики. Для нее характерно главным образом индуктивное построение, поскольку в этом случае мы идем в обратном направлении — от наблюдения события к гипотезе. При этом аргументация основывается на выводах теории вероятностей,

---

[1] Брени в [Breny, 1958] дает обзор многих определений и подходов к вероятности.

всестороннее знание которой, таким образом, оказывается совершенно необходимым» [Там же, с. 291].

«Статистика — это математическая теория того, как узнать нечто в мире через опыт» [Там же, с. 293].

Видно, что эти определения, как и многие другие, являются выражением взглядов авторов на статистику. Эти определения нельзя считать формальными определениями — это подход автора определения к статистике. Большое количество определений «языка». В качестве примеров приведем такие определения. «Язык — вся совокупность слов и словосочетаний, обычно используемая народом, нацией или расой с целью выразить или передать мысль» [Там же с. 17].

«Язык — основное средство управления поведением людей, познания действительности и самосознания личности» [Там же, с. 31].

В журнале «Здоровье мира» (1972) указывается, что имеется 65 определений слепоты. Генеральная ассамблея Всемирной организации по социальной защите слепых обратилась ко всем правительствам с просьбой принять сформулированное ею определение слепоты. Несмотря на это, продолжают существовать экономические определения слепоты, социальные и др.

К таким терминам, имеющим большое число определений, относятся также «модель», «математическая статистика», «сила», «масса», «интеграл» и много других — все эти понятия являются концепциями. Чем глубже и сложнее концепция, тем больше полиморфизм термина, которым обозначена данная концепция.

Медведев приводит большое количество различных определений функции. Отчаявшись дать определение, которое бы всех удовлетворило, Бохнер пишет: «В действительности понятие функции неопределимо и любое возможное его определение является тавтологическим» (цит. по: [Медведев, 1975, с. 22]).

Медведев [Медведев, 1974] совершенно правильно говорит о том, что различные определения функции — это различные подходы к понятию функции. Эту же особенность он подчеркивает и по отношению к понятию интеграла [Медведев, 1975].

Из всех приведенных примеров читатель не должен делать вывод, что ввиду наблюдаемого полиморфизма современной науки не следует стремиться к упорядочению научной терминологии, сведéнию адекватных определений к одному определению. В науке нужно упорно бороться с многообразием терминов и определений. В научном языке должны оставаться только несводимые друг к другу определения, выражающие различные подходы к определяемому понятию. Такие определения имеются в современной науке фактически у каждого понятия.

«С каждым понятием в науке, как правило, связано поле значений, сложившееся исторически. Всякая попытка определения

связана с ограничениями, накладываемыми на это поле [Там же, с. 139].

Каждое новое определение одного и того же понятия накладывает и новые ограничения. Содержание понятия вероятности, как и других фундаментальных понятий математики, вскрывается только в совокупности многих несводимых друг к другу определений.

При обсуждении понятия вероятности мы часто встречались с двумя типами определений, один из них связывался с частотой и давал сразу рецепт, как подсчитывать значения вероятности, другой же связывался с философскими категориями.

«Следует возвращаться время от времени к рассмотрению... различия между вероятностью как относительной частотой, полученной в результате большой серии наблюдений, и вероятностью как мерой степени доверия. Умение проводить это различие позволит лучше понимать излагаемый предмет» [Мостеллер и др., 1969, с.17], т. е. лучше понять сущность вероятности. И далее эти авторы заявляют: «В этой области никогда не будет сказано последнего слова, поскольку постоянно возникают новые направления» [Там же], другими словами, все время возникает новый подход, новые точки зрения.

* * *

Мы попытались проследить развитие понятия вероятности от античных представлений до наших дней. Это понятие является математическим понятием, лежащим в основе теории вероятностей. Понятие вероятности развивалось в первую очередь в связи с развитием самой математики, хотя нельзя отрицать влияния на него философии, также ряда других наук — физики, статистики, биологии и т. п.

В связи с глубоким проникновением вероятностных методов и рассуждений в различные области математики, во все современное естествознание, а также во многие гуманитарные науки понятие вероятности стало одним из важнейших понятий современной науки.

Необходимость осмыслить историю развития этого понятия возникает у каждого, кто стремится уяснить себе развитие естествознания и его роль в период современной научно-технической революции.

ЛИТЕРАТУРА

[*Аквинский*] Из произведений Фомы Аквинского.— В кн.: *Боргош Ю.* Фома Аквинский. М.: Мысль, 1975.
Английские материалисты XVIII в. М.: Мысль, 1967.
Андроновы А. и Е. Лаплас. М., 1930.
Аникин А. В. Юность науки. М.: Политиздат, 1979.
Белинский В. А., Калихман И. Л., Майстров Л. Е., Митькин А. М. Высшая математика с основами математической статистики. М.: Высшая школа, 1965.
Бернулли Д. О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и о других смежных вопросах.— В кн.: *Птуха М. В.* Очерки по истории статистики в России. М., 1955, т. I.
Бернулли Д. Гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
[*Бернулли Я.*] Часть четвертая сочинения Якова Бернулли. СПб., 1913.
Бернштейн С. Н. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятности.— Сообщ. Харьков. мат. об-ва. Вторая серия, 1917, XV, № 5—6.
Бернштейн С. Н. Современное состояние теории вероятностей. М.; Л.: ГТТИ, 1933.
Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
Беспамятных Н. Д. Математика в Вильнюсском университете (1803—1832).— Уч. зап. Карельского пед. ин-та, 1963, вып 14.
Биркгоф Г. Теория структур. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
Бобынин В. В. Яков I Бернулли и теория вероятностей.— Мат. образование, 1914, № 4.
Боев Г. П. Теория вероятностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
Больцман Л. Лекции по теории газов. М., 1956а.
Больцман Л. По поводу одного тезиса Шопенгауэра.— В кн.: *К. Тимирязев.* Насущные задачи современного естествознания. М., 1956б.
Боргош Ю. Фома Аквинский. М.: Мысль, 1975.
Борель Э. Случай. М.: Пг., 1923.
Борель Э. Вероятность и достоверность. М.: Наука, 1969.
Борн М. Физика в жизни моего поколения. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
Брода Э. Людвиг Больцман.— Вопр. истории естествозн. и техн. 1957, вып. 4.
Буняковский В. Я. Мысли о неосновательности некоторых понятий, относящихся к общежитию и, преимущественно, к играм и лотереям.— Маяк. СПб., 1840. ч. II,
Буняковский В. Я. Основания математической теории вероятностей. СПб., 1846.
Буняковский В. Я. О возможности введения определенных мер доверия к результатам некоторых наук наблюдательных, и преимущественно к статистикс.—Современник. СПб., 1847, т. III.
Бюффон Ж. Всеобщая и частная естественная история. СПб., 1789. Ч. I.
Бюффон Ж. Всеобщая и частная естественная история. СПб., 1792. Ч. IV.
Вавилов С. И. Физика Лукреция.— В кн.: *Лукреций.* О природе вещей. М.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. II. Статьи и комментарии.
Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М., 1960.
Веселовский И. Н., Белый Ю. А. Николай Коперник. М.: Наука, 1974.
Винер Н. Кибернетика и общество. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
Володарский А. И. Примечание к трактату Шридхары «Патиганита».— В кн.: Физико-математические науки в странах Востока. М., 1966, вып. 1—4.
Воронцов-Вельяминов Б. Лаплас. М., 1937.
Гатлих А. А. Ю. Давидов.— Мат. образование: Год первый, 1912. М., 1912.

Галилей Г. Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
Гельвеций К. А. Об уме. М., 1938.
Геродот. История в девяти книгах. М., 1888. Т. 1.
Гиббс В. Основные принципы статистической механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
Гливенко В. И. Курс теории вероятностей. М.: Гостехиздат, 1939.
Гмурман В. Е. Введение в теорию вероятностей. М.: Высшая школа, 1959.
Гнеденко Б. В. Развитие теории вероятностей в России.— Труды ин-та естествозн. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Т. II.
Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1950а.
Гнеденко Б. В. Теория вероятностей и познание реального мира.— УМН, 1950б, 5, вып. 1.
Гнеденко Б. В. О будущем прикладной математики.— В кн.: Будущее науки. М.: Знание, 1970.
Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Теория вероятностей.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
Гоббс Т. Избранные сочинения. М.; Л., 1926.
Гоббс Т. Избранные произведения в 2-х томах. М., 1964. Т. 2.
Гольбах П. А. Система природы, или О законах мира физического и мира духовного. М., 1940.
Граве Д. Математика страхового дела. Киев, 1912.
Граве Д. Математика социального страхования. Л., 1924.
Давидов А. Ю. Приложение теории вероятностей к медицине.— Моск. врачебн. журнал, 1854, кн. 1.
Дынник М. А. Материалисты Древней Греции — Гераклит, Демокрит и Эпикур.— В кн.: Материалисты Древней Греции: Собрание текстов Гераклита, Демокрита и Эпикура. М.: Политиздат, 1955.
Здоровье мира, 1972, ноябрь-декабрь.
Зернов Н. Теория вероятностей с приложением преимущественно к смертности и страхованию. М., 1843.
Зубов В. П. Развитие атомистических представлений до начала XIX века. М.: Наука, 1965.
История философии. В 4-х томах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. Т. I.
Кагарлицкий Ю. Был ли Свифт научным фантастом?— В кн.: Фантастика. М.: Молодая гвардия, 1965. Вып. 3.
Капица С. П. Лаплас. 1749—1827.— В кн.: Жизнь науки. М.: Наука, 1973.
Карапетян Б. А. Научные основы статистического учения первых политических арифметиков.— Труды Груз. политехн. ин-та им. В. И. Ленина, 1964, № 5, с. 98.
Карнап Р. Философские основания физики. М.: Прогресс, 1971.
Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
Кац М. Теория вероятностей.— В кн.: Математика в современном мире. М.: Мир, 1967.
Кетле А. Социальная система и законы, ею управляющие. СПб, 1963.
Коллинз А. Философское исследование человеческой свободы.— В кн.: Английские материалисты XVIII в. М.: Мысль, 1967. Т. 2.
Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.; Л., 1936.
Колмогоров А. Н. Роль русской науки в развитии теории вероятностей.— Уч. зап. МГУ, 1947, 1, вып. 91.
Колмогоров А. Н. Вероятность.— БСЭ. 2-е изд., 1951, т. 7.
Колмогоров А. Н. Теория вероятностей.— В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. II.
Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия «количество информации».— Проблемы передачи информации, 1965, 1, № 1.
Колмогоров А. Н. К логическим основам теории информации и теории вероятностей.— Проблемы передачи информации, 1969, 5, № 3.
Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

Кольцов А. В. Некоторые материалы к биографии академика А. А. Маркова. — Вопр. истории естествозн. и техн., 1956, вып. 1
Костицын В. А. Предисловие редактора.— В кн.: *Борель Э.* Случай. М.; Пг., 1923.
Крамер Г. Случайные величины и распределение вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
Краткий курс истории философии. М.: Мысль, 1975.
Кубесов А. Математическое наследие аль-Фараби. Алма-Ата: Наука, 1974.
Кубилюс И. П. Вероятностные методы в теории чисел.— УМН, 1956, **11**, вып. 2(68).
Кузнецов Б. Г. Электродинамика Максвелла, ее истоки, развитие и историческое значение.— Труды Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1955, 5.
Купцов В. И. О характере вероятностных представлений в физике.— В кн.: Философские вопросы квантовой физики. М.: Наука, 1970.
Курно О. Основы теории шансов и вероятностей. М.: Наука, 1970.
Ламперти Дж. Вероятность. М.: Наука, 1973.
Лаплас П. С. Опыт философии теории вероятностей. М., 1908.
Лаплас П. С. Небесная механика: Предисловие к I тому.— В кн.: Жизнь науки. М.: Наука, 1973.
Лаплас П. С. Изложение системы мира. СПб., 1861а. Т. I.
Лаплас П. С. Изложение системы мира. СПб, 1861б. Т. II.
Лахтин Л. К. Теория вероятностей.— Энцикл. словарь «Гранат», т. 41, ч. VII.
Лахтин Л. К. Курс теории вероятностей. М.: Пг., 1924.
Ленин В. И. Философские тетради. М., 1947.
Ленин В. И. Полн. собр. соч.
Летопись по Ипатскому списку. 1871.
Линник Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика.— В кн.: Математика в Петербургском-Ленинградском университете. Л.; Изд-во ЛГУ, 1970.
Литвинова Е. Ф. Даламбер. СПб., 1891.
Литвинова Е. Ф. Лаплас. СПб., 1892.
Лоэв. Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
Лукреций. О природе вещей. М.: Изд-во АН СССР, 1946. Т. I.
Лурье С. Я. Демокрит. Тексты. Перевод. Исследования. М.: Наука, 1970.
Луценков И. М. К вопросу о значении теории вероятностей в медицине.— Врач, 1888, № 50.
Ляпунов А. М. Жизнь и труды П. Л. Чебышева.— В кн.: *Чебышев П. Л.* Избранные математические труды. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
Ляпунов А. М. Избранные труды.— М.: Изд-во АН СССР, 1948.
Майстров Л. Е. Роль азартных игр в возникновении теории вероятностей.— Acta Universitatis Debreceniensis. T. VII/2, 1961. Debrecen, 1962.
Майстров Л. Е. Даламбер и теория вероятностей.— Ист.-мат. исследования, 1966, вып. 17.
Майстров Л. Е. Теория вероятностей: Исторический очерк. М.: Наука, 1967. Пер. на англ. *Maistrov L. E.* Probability Theory: A Historical Sketch. New York; London: Acad. Press, 1974.
Майстров Л. Е. Основные этапы развития теории вероятностей. Actes du XI^{e} Congrès international d'Histoire des Sciences. III. Wroclaw etc., 1968.
Марков А. А. Закон больших чисел и способ наименьших квадратов.— Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те, сер. II, 1898, 8, № 3.
Марков А. А. Исчисление вероятностей. М., 1924.
Марков А. А. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
Марков А. А. (мл.) Биография А. А. Маркова.— В кн.: *Марков А. А.* Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1951.

Маркс К., Энгельс Ф. Соч., 2-е изд.
Материалисты Древней Греции: Собрание текстов Гераклита, Демокрита и Эпикура. М.: Политиздат, 1955.
Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974.
Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975.
Мееровский Б. В. Английские материалисты XVIII в. — В кн.: Английские материалисты XVIII в. М.: Мысль, 1967. Т. 1.
Мизес Р. Вероятность и статистика. М.; Л., 1930.
Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. М.: Мир, 1969.
Налимов В. В. Вероятностная модель языка. М.: Наука, 1979.
Нарский И. С. Давид Юм и его философия.— В кн.: *Юм Д.* Сочинения в двух томах. М.: Мысль, 1965. Т. 1.
Научное наследство. М.; Л., 1948. Т. 1.
Некрасов П. А. Московская философско-математическая школа и ее основатели. М., 1904.
Некрасов П. А. Теория вероятностей. СПб., 1912.
Некрасов П. А. Средняя школа, математика и научная подготовка учителей. 1916.
Остроградский М. В. Полное собрание трудов. Киев, 1961а. Т. III.
Остроградский М. В. Педагогическое наследие. М., 1961б.
Паннекук. История астрономии. М., 1966.
Паскаль Б. Мысли СПб., 1888.
Пачоли Л. Трактат о счетах и записях. М.: Статистика, 1974.
Платон. Сочинения в трех томах. М.; Мысль, 1970. Т. 2.
Предтеченский Е. А. Иоган Кеплер. СПб., 1891.
Пристли Дж. Философское учение о необходимости.— В кн.: Английские материалисты XVIII в. М.: Мысль, 1968. Т. 3.
Птуха М. Очерки по истории статистики XVII—XVIII веков. М.: Гостехиздат, 1945.
Пуанкаре А. Наука и гипотеза. М., 1904.
Пуанкаре А. Наука и метод. СПб., 1910.
Пуанкаре А. Последние мысли. Пг., 1923.
Рассел Б. Человеческое познание. М., 1957.
Реньи А. Письма о вероятности. М.: Мир, 1970.
Романов Н. А. История одного искания.— В кн.: Историко-биографический альманах «Прометей». М.: Молодая гвардия, 1971. Т. 8.
Романовский В. И. Элементарный курс математической статистики. М.; Л.: Госпланиздат, 1939.
Рузавин Г. И. Логическая вероятность и индуктивные выводы.— Вопр. философии, 1967, № 4.
Сачков Ю. В. Квантовая механика и природа вероятности.— В кн.: Философские вопросы квантовой физики. М.: Наука, 1970.
Сачков Ю. В. Введение в вероятностный мир. М.: Наука, 1971.
Смирнов В. И. Даниил Бернулли.— В кн.: *Бернулли Д.* Гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
Современные проблемы теории познания диалектического материализма М.: Мысль, 1970. Т. 2.
Софийский временник, или Русская летопись с 862 по 1534 г. Ч. I. М., 1820.
Тамм И. Е. В ожидании новой теории.— Неделя, 1968, № 28 (436).
Тимирязев К. Насущные задачи современного естествознания. М., 1908.
Толанд Д. Письма к Серене.— В кн.: Английские материалисты XVIII в. М.; Мысль, 1967. Т. 1.
Тутубалин В. Н. Теория вероятностей: Краткий курс и научно-методические замечания. М.: Изд-во МГУ, 1972.
аль-Фараби. Математические трактаты. Алма-Ата. Наука, 1972.
Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 1.
Флоров. Шашка вперед.— Вестн. опытной физики и элементарной математики. 1893, № 148, 151.

Франкфурт У. И., Френк А. М. Христиан Гюйгенс. М.: Наука, 1962.
Франкфурт У. И., Френк А. М. Джозайя Виллард Гиббс. М.: Наука, 1964.
Хинчин А. Я. Метод произвольных функций и борьба против идеализма в теории вероятностей.— В кн.: Философские вопросы современной физики. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
Хинчин А. Я. Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей.— Вопр. философии, 1961, № 1, 2.
Хотимский В. Исторические корни теории вероятностей.— Под знаменем марксизма, 1936, № 1, № 6.
Чебышев П. Л. Избранные математические труды. М.; Л., 1946.
Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. II.
Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Т. III.
Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951. Т. V.
Шырев В. Логика индуктивная.— Философ. энциклопедия. Т. 3.
Шридхара. Патиганита.— В кн.: Физико-математические науки в странах Востока. М., 1966. Вып. 1 (4).
Эйнштейн А. К теории броуновского движения.— Собр. науч. трудов. М., 1966а. Т. III.
Эйнштейн А. Элементарная теория броуновского движения.— Там же. М., 1966б. Т. III.
Эйнштейн А. Об одной теореме теории вероятностей и ее применение в теории излучения. Совм. с *Л. Хопфом.*— Там же, М., 1966в. Т. III.
Юм Д. Сочинения в двух томах. М.: Мысль, 1965а. Т. 1.
Юм Д. Сочинения в двух томах. М.: Мысль, 1965б. Т. 2.
Яглом А. Вероятность.— Философ. энциклопедия. М., 1960. Т. 1.
Яглом И. Кибернетика и теория информации.— В кн.: О некоторых вопросах современной математики и кибернетики. М., 1965.
D'Alembert J. Croix ou pile.— In: Encyclopedie. Paris, 1754. T. 4.
D'Alembert J. Refléxions sur le calcul des probabilités.— In: Opuscules mathématiques. Paris, 1761a. T. 2.
D'Alembert J. Sur l'application du calcul des probabilites à l'inoculation de la petite Vèrole.— In: Opuscules mathématiques. Paris, 1761b. T. 2.
D'Alembert J. Opuscules mathematiques. Paris, 1770. T. 4.
D'Alembert J. Sur le calcul des probabilités.— In: Opuscules mathématiques. Paris, 1780. T. 7.
D'Alembert. Absent.— In: Dictionnaire encyclopedique des Mathématiques. 1789. T. I.
D'Alembert J. Oeuvres completes. Paris, 1821. T. 1.
Alexiewicz A. Antoni Lomnicki (1881—1941). Roczn. Towarz. nauk. varszawskiego. Lata XXXI—XXXVIII (1938—1945). Warszawa, 1954.
Arbuthnot Y. An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observ'd in the Births of both Sexes.— Phil. Trans. London, (1710) 1712, 27.
Bayes T. Studies in the history of probability and statistics. IX. Thomas Bayes's essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances (Reproduced from Phil. Trans., 1763, 53).— Biometrika, 1958, 45, № 3—4.
Barankin E. W. Toward an objectivistic theory of probability.— Proc. 3rd. Berkeley Symp. Math. Berkeley; Los Angeles, 1956.
Bell E. T. The Development of Mathematics. New York, 1945.
Bernoulli D. Specimen Teoriae Novae de Mensura Sortis.— Commentarii Academia Petropolitanae. (1730—1731), 1738, T. V.
Bernoulli D. De usu algorithmi enfinitesimalis in arte conjectandi specimen.— Novi Commentarii Academinae Petropolitanae. 1768. T. XII.
Bernoulli D. Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glucksfallen. Leipzig, 1896.

Bernoulli D. Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum dicrepantium atque verisimillima inductio inde formanda.— In: *Euler L.* Opera omnia. 1923, vol. 1, p. 7; Biometrika, 1961, 48, № 1—2.
Bernoulli J. Ars conjectandi. Basilleae, 1713.
Bernoulli J. Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). I und II Teil. Leipzig, 1899 (Ostwald's klassiker № 107).
Bernoulli N. De usu Artis conjectandi in jure. Basilleae. 1709.
Bertrand J. Sur la combinaison des mesures d'une même grandeur.— Compt. rend., 1888, 106.
Bertrand J. Calcul des probabilités. Paris, 1899.
Boltzmann L. Wissenschaftliche Abhandlungen. 1909, Bd. III
Breny H. Sur les «fondaments» de la théorie des probabilités.— Rev. questions sci., 1958, 19.
Cardano G. Opera omnia. 1663. T. 1.
Cardano G. Book on games of chance.— In: *Ore O.* Cardano, the Gambling Scholar. Princeton, 1953.
Carnap R. Logical Foundations of Probability. Chicago, 1950.
Clarke R. D. The concept of probability.— J. Inst. Actuaries, 1954, 80, № 1.
Condorcet. Suite du Mémoire sur le calcul des Probabilités.— In: Histoire de l'Académie Royale des Sciences (Année 1782—1784). Paris, 1785.
David F. N. Studies in the history of probability and statistics. I. Dicing and gaming (a note on the history of probability).— Biometrika, 1955, 42, p. 1—2.
David F. N. Some notes on Laplace (Bernoulli — Bayes — Laplace). Anniversary vol.: Proc. Intern. Res. Seminar stat. Lab. Univ. Calif. Berkeley, 1963. New York: B. Heidelberg, 1965.
Euler L. Opera omnia. 1923. vol. 1, 7.
Fermat P. Oeuvres. Paris: Ganthier — Villars, 1894. Vol. 2.
Finetti B. de. La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives.— Ann. Inst. H. Poincaré, 1937, 7.
Finetti B. de. Studies in Subjective Probability/Ed. H. E. Kyburg, H. E. Smokun, 1964, N 4.
Freudental H. Models in applied probability.— Synthese, 1960, 12, N 2/3.
Galilei G. Opera. Fiorentina, 1855. T. XIV.
Graunt J. Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality. London, 1662.
Haas K. Die mathematischen Arbeiten von Johan Hudde (1628—1704) Bürgermeister von Amsterdam.— Centaurus, 1956, 4, № 3.
Huygens Ch. Oeuvres complètes, 1895. T. VI.
Huygens Ch. Oeuvres complètes. 1920, T. XIV.
Jeffreys H. Theory of Probability. Oxford, 1939.
Kendall M. G. Studies in the history of probability and statistics. II. The beginnings of a probability calculus.— Biometrika, 1956, 43, № 1—2.
Keynes J. M. A Treatise on Probability. New York: Evanston, 1962.
Kolmogorov A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1933.
Kyburg J. H. E. Probability and the Logic of Rational Belief. Wesleyan Univ. Press, 1961.
Laplase P. S. Théorie analytique des probabilités. Paris, 1812.
Mémoire sur la probabilité des causes par les événements (1774).— Oeuvres completes. Paris, 1891. T. 8.
Lomnicki A. Nouveaux fondements du calcul des probabilités.— Fundam. Math., 1923, 4.
Los J. On the Axiomatic Treatment of Probability. Coll. Math., 1955, 2.
Martin-Löf P. The definition of raundom sequeces.— Inform. and Control, 1966, 9.
Martin-Löf P. Algoritm and Raudomness.— Rev. Inst. Intern. statist., 1969, 37, N 3.

Mahalanobis P. C. The foundations of statistics.— Sankhyā—Indian J. Statist. 1957, **18**, N 1/2.
Mises R. von Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1931.
Mises R. von. Mathematical Theory of Probability and Statistics. New York; London: Acad. Press, 1964.
Moivre A. de. De Mensura Sortis.— Phil. Trans. London, 1711, **27**, N 329.
Moivre A. de. Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Londini, 1730.
Moivre A. de. The doctrine of chances. London, 1756.
Montmort P. Essai d'analyse sur les jeux de Hazart. Paris, 1713.
Needham J. Science and Civilization in China. Cambridge, 1962.
Newman J. R. Laplace.— Sci. Amer., 1954, N 6, p. 190.
Ore O. Cardano, the Gambling Scholar. Princeton, 1953.
Pascal B. Oeuvres Completes. Paris, 1908. T. III.
Petty W. Les oeuvres économiques, 1905. T. II.
Plackett R. L. The principle of the arithmetic mean.— Biometrika. V. **45**, 1958, N 1/2.
Plank M. Wege zur physikalische Erkentnis. Stuttgart, 1944.
Poincaré H. Calcul des probabilités. Paris, 1912.
Poisson S. D. Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Paris, 1837.
Reichenbach H. The theory of probability. Berkeley; California: Univ. California Press, 1949.
Rènyi A. Levelek a valószinüségröl. Budapest: Akad. kiado, 1969a.
Rènyi A. Briefe über die Wahrscheinlichkeit; Berlin: Veb; deutscher Verl. der Wissenschaften, 1969b.
Tartaglia N. General trattato di numeri et misure. Venezia, 1560.
Thatcher A. R. Studies in the History of Probability and Statistics. VI: A note on the early solutions of the problem of duration of play.— Biometrika, 1957, **44**, N 3/4.
Todhunter I. History of the mathematical theory of the probability. Cambridge; London, 1865.
Weil F. La correspondance Buffon—Cramer.— Rev. histoire sci., 1961, **14**, N 2.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

[1] Составлен А. Ф. Лапко.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Леонид Ефимович Майстров

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Утверждено к печати
Институтом истории естествознания и техники
Академии наук СССР

Редактор А. Ф. Лапко
Редактор издательства Э. С. Павлинова
Художник А. Г. Кобрин
Художественный редактор Н. Н. Власик
Технический редактор Т. Д. Панасюк
Корректор Л. А. Сулханова

ИБ № 16120

Сдано в набор 21.08.79.
Подписано к печати 08.02.80.
Т-02528. Формат 60×90 1/16
Бумага типографская № 2
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 17 Уч.-изд. л. 18,8
Тираж 4350 экз. Тип. зак. 2238
Цена 2 р. 20 к.

Издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

